Merkblatt: Auswertung physikalischer Messungen

1 Literatur:

- Skript: *Einführung in die Messdatenanalyse* zum Download auf den Webseiten des Grundpraktikums

Dieses Merkblatt kann zwangsläufig nur „rezeptartig" knappe Hinweise zur Auswertung geben, ohne auf Herleitungen aus der Theorie der Messunsicherheiten einzugehen. Zur näheren Erläuterung stehen Ihnen die Praktikumsassistenten zur Verfügung. Benutzen Sie bitte auch das ausführlichere Skript zur Messdatenanalyse und die darin angegebene Lehrbuch- und Originalliteratur.

2 Messunsicherheiten

Physikalische Messungen sind grundsätzlich mit Unsicherheiten behaftet. *Messunsicherheit* bezeichnet dabei nach dem GUM (von der ISO herausgegebener Leitfaden: **G**uide to the Expression of **U**ncertainty in **M**easurement) einen Parameter, der dem Messergebnis beigeordnet ist und der die Streuung derjenigen Schätzwerte kennzeichnet, die einer Messgröße auf der Basis vorliegender Information vernünftiger Weise zugewiesen werden können.

Oft wird auch von *Messabweichungen* gesprochen. Hier setzt man voraus, dass, zumindest hypothetisch, einer Messgröße ein eindeutiger "wahrer Wert" zugeordnet werden kann. Messabweichung ist dann die Abweichung des aktuellen Messwertes von diesem unbekannten wahren Wert. Man unterscheidet dabei zwischen systematischen und zufälligen oder auch statistischen Messabweichungen:

Systematische Messabweichungen haben als Ursache z. B. ungenaue Kalibrierung, Nullpunktsabweichungen, „Drift" der Anzeige, aber u. U. auch ein ungeeignetes Messverfahren oder mathematische Näherungen in der Auswerteformel. Manchmal ist ihre Erkennung schwierig, oft lassen sich diese Abweichungen jedoch durch geeignete Verfahren abschätzen. Mehr dazu finden Sie im ausführlichen Skript.

Statistische Messabweichungen können vielfältige Ursachen haben, z. B. Erschütterungen und Temperaturschwankungen während der Messung, ungenaue Einstellung und Ablesung durch den Beobachter. Bei mehrfacher Wiederholung der einzelnen Messung sind diese Abweichungen verschieden groß: Die einzelnen Messwerte x_i streuen um den Mittelwert μ. Dieses Verhalten wird für viele physikalisch relevante Fälle durch die *Gauß'sche Normalverteilung* beschrieben:

$$N(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{1}$$

mit $\int_{-\infty}^{+\infty} N(x)\,\mathrm{d}x = 1$ Diese Funktion beschreibt eine glockenförmige Kurve, deren Maximum bei μ und deren Wendepunkte bei $\mu \pm \sigma$ liegen. Dabei beschreibt σ die Standardabweichung der Verteilung. Bei einer Normalverteilung befinden sich 68 % aller Messwerte innerhalb der durch die Standardabweichung angegebenen Grenzen $\mu \pm \sigma$. Diese kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsdichte $N(x)$ erhält man nur bei (theoretisch) unendlich vielen Einzelmessungen. Im Praktikum stehen nur wenige Einzelmessungen zur Verfügung. Wir können daher nur angenäherte „Bestwerte" oder „wahrscheinlichste Werte" für Mittelwert und Standardabweichung angeben:

$$\mu \approx \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{2}$$

$$\sigma \approx s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \tag{3}$$

$\bar{x}$ ist der bekannte arithmetische Mittelwert, und s wird als empirische Standardabweichung *der Einzelmessung* bezeichnet: $x_i \pm s$.

Da der Mittelwert zuverlässiger als jede Einzelmessung ist, wird die Unsicherheit des Mittelwertes kleiner als die Unsicherheit jeder Einzelmessung sein. Die Unsicherheit des Mittelwertes berechnet sich dabei gemäß:

$$\Delta\bar{x} = s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \tag{4}$$

Das Ergebnis einer Messreihe lautet dann: $\bar{x} \pm s/\sqrt{n}$. Für genügend große n (typisch $n \geq 10$) werden im Mittel 68% der so ermittelten Intervalle den "wahren Wert" μ der Grundgesamtheit enthalten. $\Delta\bar{x} = s_{\bar{x}}$ wird als „Standardabweichung" oder „Vertrauensbereich" *des Mittelwertes* bezeichnet. Häufig muss zu der so gewonnenen Standardabweichung noch ein Unsicherheitsbeitrag Δx_{Tol} aus den Anzeige- und Ablesegenauigkeiten oder den Toleranzgrenzen eines Messgerätes berücksichtig werden. Dieser addiert sich dann quadratisch zur Standardabweichung und als gesamte Unsicherheit ergibt sich:

$$\Delta x_{\mathrm{ges}} = \sqrt{\Delta\bar{x}^2 + \Delta x_{\mathrm{Tol}}^2}. \tag{5}$$

Häufig ist nicht die Messgröße $\bar{x}$ als Mittelwert aus direkt zugänglichen Einzel-Messwerten das Ziel der Untersuchung, sondern die Berechnung einer aus $\bar{x}$ abgeleiteten Größe $\bar{u} := u(\bar{x})$. Zur Abschätzung der Unsicherheit Δu von $\bar{u}$ berechnet man die Steigung der Funktion $u(x)$ an der Stelle $\bar{x}$ und linearisiert das Kurvenstück um $\bar{u}$. Man erhält

$$\Delta u = \left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{\bar{x}} \cdot \Delta x\ . \tag{6}$$

Diese Näherung ist nur sinnvoll, wenn $u(x)$ differenzierbar ist, und wenn $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ sich im Gebiet $\bar{x} \pm \Delta x$ kaum ändert.

Im allgemeinen Fall hängt $\bar{u}$ von mehreren Größen $\bar{x}, \bar{y} \ldots$ ab, die mit den individuellen Unsicherheiten $\pm\Delta\bar{x}, \pm\Delta\bar{y} \ldots$ versehen sind, d.h. $u(x, y, \ldots)$ ist eine Funktion mehrerer Veränderlicher. Da wir gewöhnlich die Unsicherheiten als voneinander unabhängig voraussetzen dürfen, gilt das Gauß'sche Gesetz für die Fortpflanzung von Unsicherheiten:

$$\Delta u = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\bar{x}} \cdot \Delta\bar{x}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\bar{y}} \cdot \Delta\bar{y}\right)^2 + \ldots} \tag{7}$$

2.1 Schreibweisen für Messergebnisse und deren Unsicherheit

Die Unsicherheit hat dieselbe Maßeinheit wie das Messergebnis. Beispielsweise notiert man das Ergebnis einer mehrfachen Längenmessung $\bar{x}$ mit einer Standardabweichung des Mittelwertes $s_{\bar{x}} = 0.038\,\mathrm{cm}$ wie folgt:

$$x = (1.542 \pm 0.038)\,\mathrm{cm} \tag{8}$$

Man beachte, dass die Position der kleinsten Dezimalstelle für $\bar{x}$ und $s_{\bar{x}}$ dieselbe ist. Dies führt zu der in der Fachliteratur sehr gebräuchlichen verkürzten Schreibweise statt (8):

$$x = 1.542(38)\,\mathrm{cm} \tag{9}$$

Die Unsicherheit sollte dabei immer auf eine bis zwei Stellen aufgerundet werden. Ergo ist bei einer solchen Angabe die vorletzte bzw. drittletzte Stelle noch gesichert, unsicher hingegen die letzte bzw. letzten zwei Stelle(n).

Häufig charakterisiert man die Zuverlässigkeit eines Messergebnisses dadurch, dass man seine absolute Unsicherheit $\Delta\bar{x}$ auf $\bar{x}$ bezieht. Man gibt also eine *relative Unsicherheit* $\Delta\bar{x}/\bar{x}$ – üblicherweise in Prozent – zusätzlich zum Ergebnis an. Obiges Beispiel lautet dann so:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= (1 \pm 2.5\,\%) \cdot 1.542\,\mathrm{cm} && (10)\\ \text{bzw.}\quad \bar{x} &= (1 \pm 0.025) \cdot 1.542\,\mathrm{cm} && (11) \end{aligned}$$

2.2 Unsicherheit bei kernphysikalischen Messungen

Hier ermittelt man in der Regel eine Zahl N statistischer Ereignisse in einem festen Zeitraum Δt. Wiederholt man die Messung, so zeigt sich, dass N *Poisson*-verteilt ist mit einer Standardabweichung von $\Delta N \approx \sqrt{N}$. Die relative Messunsicherheit $\Delta N/N = \sqrt{N}/N = 1/\sqrt{N}$ lässt sich deshalb bereits aus einer einzelnen Messung abschätzen. Er hängt von der Zahl der Ereignisse und (indirekt) von der Messzeit ab. Zur Verkleinerung der relativen Unsicherheit müssen einfach nur mehr Ereignisse gezählt werden.

3 Benutzung von Logarithmenpapier bzw. logarithmischen Auftragungen

Logarithmenpapier dient dazu, Exponentialfunktionen $y = a \cdot e^{bx}$ und Potenzfunktionen $y = a \cdot x^b$ geradlinig darzustellen. Dies ist hilfreich, wenn für gemessene Wertepaare ein Zusammenhang von der Form der Exponential- oder der Potenzfunktion vermutet wird. Statt eine Ausgleichs*kurve* durch die auf Millimeterpapier eingetragenen Versuchswerte zu legen, muss man bei passender logarithmischer Auftragung nur die Parameter einer Ausgleichs*geraden* ermitteln. Weiterhin stellt man auch andere Funktionen auf Logarithmenpapier dar, wenn sich eine Größe über mehrere Zehnerpotenzen erstreckt, oder wenn man nicht gleiche Unterschiede, sondern *gleiche Verhältnisse* durch *gleiche Abstände* dargestellt haben möchte.

Eine physikalische Größe x ist ein Produkt aus Zahlenwert $\{x\}$ und Einheit $[x]$:

$$x = \{x\} \cdot [x] \quad . \tag{12}$$

Dadurch treten formale und oft auch praktische Schwierigkeiten bei der Auswertung logarithmischer Darstellungen auf, da der Logarithmus nur von einer reinen Zahl[1] gebildet werden kann. Man meistert diese Schwierigkeit entweder dadurch, dass man die physikalische Größe $x = \{x\} \cdot [x]$ auf eine passende Referenzgröße x_0 oder auf die physikalische *Einheits*größe $\hat{x} = 1 \cdot [x]$ normiert. Beispielsweise

[1] Das gilt für alle Funktionen, die eine Summe verschiedener Potenzen darstellen, z.B. die mit dem Logarithmus eng verwandte Exponentialfunktion: $e^z = \frac{1}{1} + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{z^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} + \cdots$

kennzeichnet man die Achse mit s/m (d.h. Streckenlänge/Meter) für Strecken, bzw. mit m/g (d.h. Masse/Gramm) für Massen. Um Verwechslungen zu vermeiden (Streckenlänge(s) $\longleftrightarrow$ Sekunde(s), Masse(m) $\longleftrightarrow$ Meter(m), Fallbeschleunigung(g) $\longleftrightarrow$ Gramm(g) ...), werden in der Fachliteratur die Symbole der physikalischen Größen *kursiv*, die Einheiten aufrecht gedruckt. Für handschriftliche Notation ist dies unpraktikabel, dort wird in der Einheitsgröße die Zahl 1 mitnotiert, also: $s/(1\,\mathrm{m})$ bzw. $m/(1\,\mathrm{g})$. Diese Kennzeichnung sollte auch bei allen anderen graphischen Darstellungen angewandt werden. Sie ist konsequent und praktisch: man kann beispielsweise die Messgröße „Tasseninhalt in Deziliter" zwanglos als $V_{\mathrm{Tasse}}/(10^{-4}\,\mathrm{m}^3)$ notieren.

3.1 Einfach-logarithmisches Papier

Merke: Auf einfach-logarithmischem Papier wird das Bild der **Exponential**funktion geradlinig, sofern man Ordinaten logarithmisch einteilt und Abszissen linear. Sind umgekehrt Ordinaten linear geteilt und Abszissen logarithmisch, dann wird das Bild der **Logarithmus**funktion geradlinig.

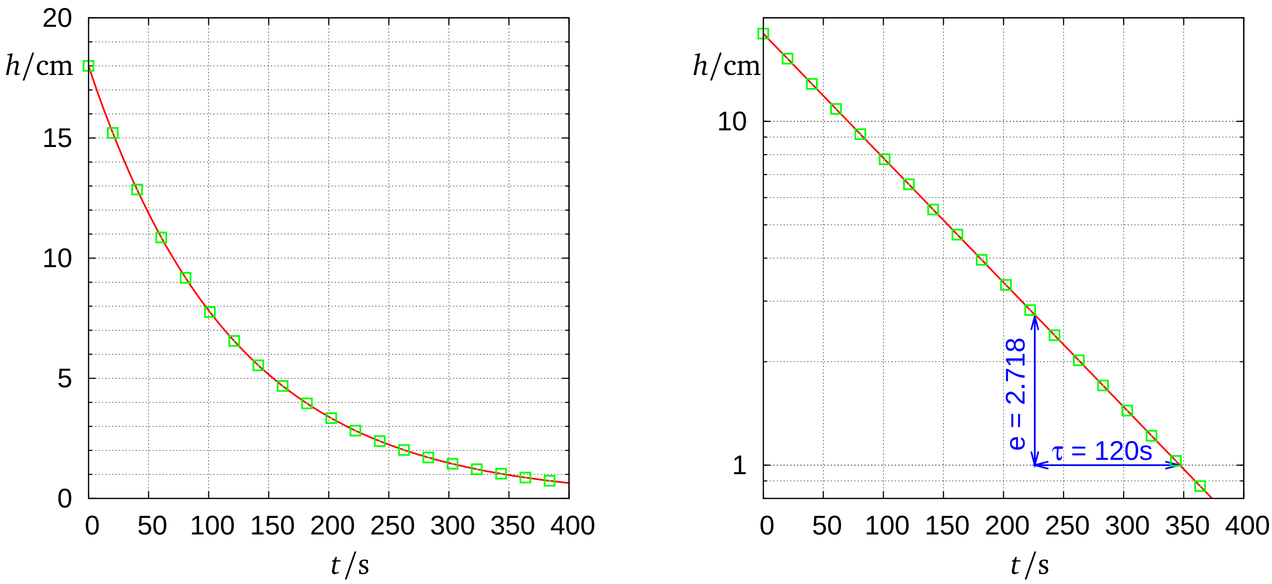

Abbildung 1: Zur Verdeutlichung einer einfach-logarithmischen Auftragung: Ein exponentieller Zerfall wird als Gerade abgebildet. Links: lineare Achseneinteilung, rechts einfach-logarithmische Achseneinteilung.

Als Beispiel betrachten wir einen exponentiellen Zerfall. Als Funktion der Zeit t sei beispielsweise die Höhe h von Bierschaum gemessen worden und es wird ein Zusammenhang erwartet gemäß:

$$h(t) = h_0 \cdot e^{-t/\tau} \tag{13}$$

mit einer Anfangshöhe h_0 und einer Zeitkonstante τ.

Nachdem Glg. (13) in logarithmierter Form $\log(h(t)/h_0) = -t/\tau \, \log(e)$ eine Gerade ergibt, lässt sich aus dem Steigungsdreieck wie in Abb. 1 gezeigt, direkt die Zeitkonstante ablesen: Wählt man zwei Werte von h so, dass ihr Verhältnis gerade der Eulerschen Zahl entspricht, also $h_1/h_2 = e = 2.718$, dann ergibt die Differenz der zugehörigen Zeitwerte gerade die gesuchte Zeitkonstante $t_2 - t_1 = \tau = 120\,\mathrm{s}$.

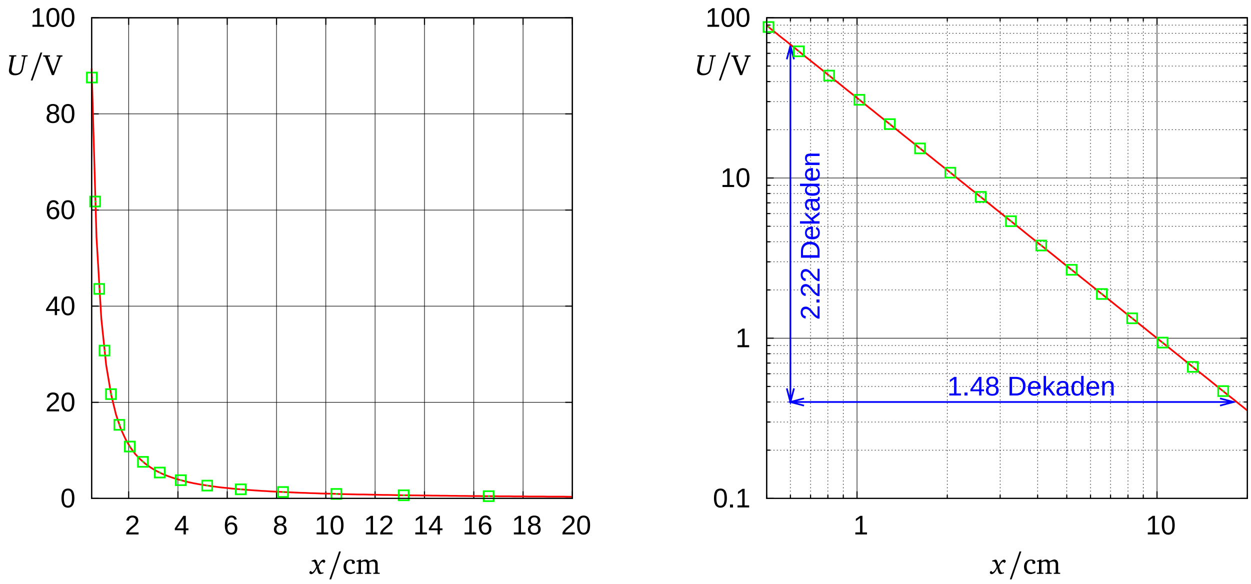

Abbildung 2: Zur Verdeutlichung einer doppelt-logarithmischen Auftragung: Eine Potenzfunktion wird als Gerade abgebildet. Links: lineare Achseneinteilung, rechts doppelt-logarithmische Achseneinteilung.

3.2 Doppelt-logarithmisches Papier

Merke: Auf doppelt-logarithmischem Papier wird das Bild einer **Potenz**funktion geradlinig.

Als Beispiel gelte für eine gemessene elektrische Spannung U in Volt als Funktion eines Abstandes x in cm ein Potenzgesetz:

$$U = U_0 \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-b} \tag{14}$$

Nun lassen sich alle Konstanten einfach aus der doppelt-logarithmischen Auftragung ablesen: Wählt man z.B. die Spannung U in Einheitsgrößen, also $U_0 = 1\,\mathrm{V}$, so liest man $x_0 = 10\,\mathrm{cm}$ ab. Aus der Steigung der Geraden ergibt sich die Potenz b, denn logarithmiert führt Glg. (14) zu $\log(U/U_0) = -b \cdot \log(x/x_0)$. Aus dem Steigungsdreieck in Abb. 2 liest man ab:

$$-b = \frac{\log(U_2) - \log(U_1)}{\log(x_2) - \log(x_1)} = \frac{2.22}{1.48} = \frac{3}{2} = 1.5$$

Man beachte beim Steigungsdreieck, dass unterschiedliche Längen für eine Dekade auf beiden Achsen zu berücksichtigen sind.