

Abbildungseigenschaften dünner Linsen

1 Lernziele

Umgang mit einfachen optischen Instrumenten. Funktionsweise unterschiedlicher Linsenarten und deren Verwendung zur Realisierung von Abbildungen.

2 Vorausgesetzte Kenntnisse

1. Brechung und Reflexion an ebenen und sphärischen Flächen, Dispersion
2. Linsenarten, Lupe, Abbildungsgesetze, Bildkonstruktion,
3. Linsenfehler und Möglichkeiten zur Reduktion der Linsenfehler
4. Projektionsapparat, menschliches Auge,
5. Aufgaben zur Vorbereitung

3 Literatur

1. Bergmann-Schäfer *Optik* Band III
2. Hecht *Optik*
3. Gerthsen *Physik*
4. Alonso-Finn *Physik*
5. Westphal *Physik*
6. Westphal *Physikalisches Praktikum*;
7. Walcher *Praktikum der Physik*
8. Literaturmappe

4 Grundlagen

4.1 Optische Abbildung

Die Qualität einer optischen Abbildung wird entscheidend von den Eigenschaften der verwendeten Linse(n) beeinflusst. Zur Untersuchung der Abbildungseigenschaften bildet man einen Praktikumsgegenstand (durchleuchtetes Pfeilmuster) mit unterschiedlichen Linsen auf einen Schirm ab. Abhängig von der Brechkraft der Linse und dem Abstand des Gegenstandes vor der Linse gibt es eine Ebene hinter der Linse, in der der Gegenstand scharf abgebildet wird. Die Größe der Abbildung ist dann durch die gewählten Entfernungen festgelegt. Das zugrunde liegende Linsenabbildungsgesetz lautet:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \quad (1)$$

wobei f die Brennweite der Linse und g , b die Gegenstandsweite bzw. die Bildweite bezeichnen.

4.2 Linsenfehler

Im wesentlichen gibt es zwei Hauptarten von Linsenfehlern. Man unterscheidet monochromatische und chromatische Fehler. Bei den chromatischen Fehlern handelt es sich um Farbfehler, die durch Dispersion entstehen. Trifft weißes Licht, welches aus sehr vielen verschiedenen Wellenlänge besteht, auf eine Linse, werden die verschiedenen Wellenlängen unterschiedlich stark gebrochen, was insbesondere am Rand des entstandenen Bildes zu einem regenbogenartigen Farbverlauf führt. Bei den chromatischen Fehlern handelt es sich nicht um Fertigungsfehler der Linse, sie resultieren aus der natürlichen Eigenschaft des Lichtes und können nicht vermieden werden. Allerdings gibt es achromatische Linsen oder Achromaten, die der Dispersion entgegenwirken und die chromatischen Fehler korrigieren.

Die monochromatischen Fehler sind eine Abweichung von der paraxialen Näherung. Bei der idealen Linsenabbildung gehen wir davon aus, dass alle Strahlen, die durch das vorgegebene Linsensystem durchgegangen sind, anschließend wieder in einem Punkt konvergieren. Ideale Linsen gibt es jedoch nicht. Bei realen Linsen werden die Strahlen so abgelenkt, dass sie nicht exakt in einem Punkt konvergieren. Je weiter der Strahl von der optischen Achse entfernt ist, desto stärker die Abweichung vom idealen Brennpunkt. Die monochromatischen Fehler lassen sich in folgende Abbildungsfehler, im Folgenden auch Aberration genannt, unterteilen:

- Sphärische Aberration: Hierbei werden die achsnahen Strahlen anders gebrochen als die Randstrahlen. Achsennahe, parallele Strahlen werden im paraxialen Brennpunkt fokussiert, während achsenferne weniger stark (Zerstreuungslinse) bzw. stärker gebrochen (Sammellinse) werden. Vermeiden kann man dies durch spezielle Formen der Linsen, Blenden, eine geschickte Orientierung der Linse, asphärische Linsen oder Asphären, einen möglichst großen Krümmungsradius und eine Kombination aus konvexen und konkaven Linsen.
- Koma: Bei diesem Abbildungsfehler treffen die Strahlen nicht senkrecht, sondern unter einem bestimmten Winkel auf die Linse. Da auch hier Randstrahlen wieder anders als achsnahe Strahlen gebrochen werden, kommt es zu unterschiedlichen Vergrößerungen innerhalb der Abbildung. Die Folge ist eine typische, kometenschweifartige Verzerrung.
- Astigmatismus: Im wesentlichen gibt es zwei Ebenen für optische Strahlen. Eine Ebene zwischen Hauptstrahl und optischer Achse, und die Ebene senkrecht dazu. Die Strahlen treffen dadurch in unterschiedlichen Winkeln auf die Linse, was zu einer Asymmetrie im Strahlengang führt. Betrachtet man beispielsweise ein zunächst rundes Strahlenbündel, so wird dieses allmählich elliptisch und dann entlang der Achse zu einem Strich. Die Folge davon ist, dass nie ein kreisförmiger Fokus entsteht, sondern im Grunde genommen zwei Strichfoki.
- Bildfeldwölbung: Auch hier betrachten wir den Unterschied zwischen achsnahen und achsfernen Strahlen. Die Bildweite eines achsfernen Punktes weicht, durch unterschiedliche Entfernungen und Brechung innerhalb der Linse, leicht von der Bildweite eines achsnahen Punktes ab. Wird nun die Abbildung auf einem geraden Schirm betrachtet, trifft man nicht die perfekte Bildweite eines jeden Punktes. Dies führt zu einer am Randbereich unscharfen Abbildung.
- Verzeichnung: Sie führt, im Gegensatz zu den oben genannten Fehlern, nicht zu unscharfen Bildern. Stattdessen werden hier verschiedene Gegenstandspunkte unterschiedlich stark vergrößert und führen somit zu einer Verzerrung des Bildes. Quadratische Bilder werden kissen- bzw. tonnenförmig; ein Beispiel für eine tonnenförmige Verzeichnung sind die sogenannten Fisheye-Fotos.

Durch geschickte Kombination verschiedener Linsen und Blenden ist es möglich, die monochromatischen Fehler nahezu auszugleichen.

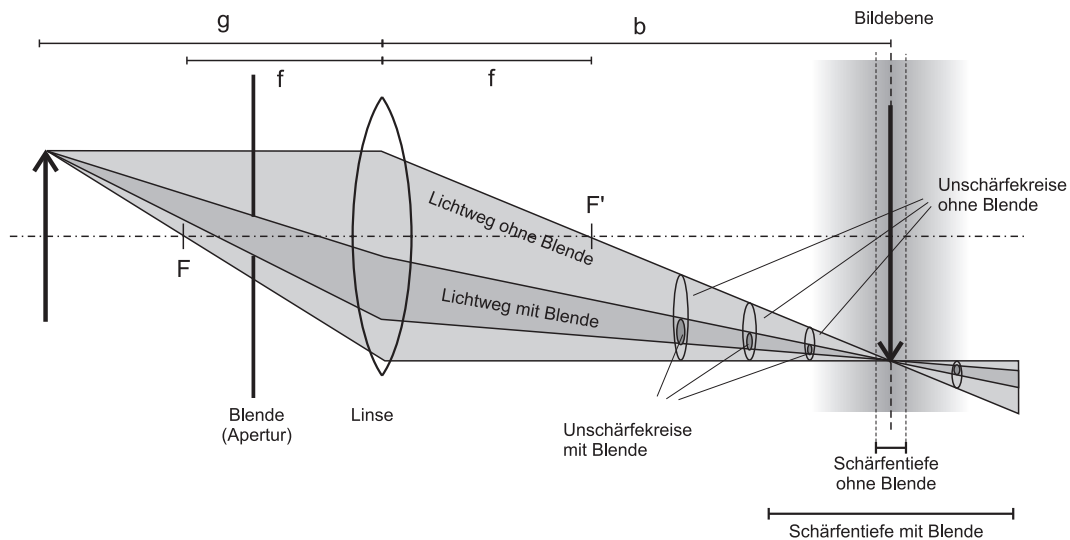


Abbildung 1: Vergrößerung der Schärfentiefe durch Verkleinerung der Apertur

4.3 Schärfentiefe einer optischen Abbildung

Als Schärfentiefe bezeichnet man den Bereich vor und hinter der Bildebene, in dem die Abbildung des Gegenstandes noch einigermaßen scharf erscheint. Die Größe dieses Bereiches ist abhängig von der Objektivöffnung (Linsendurchmesser, Apertur), durch die der Strahlengang der Abbildung begrenzt ist. Für eine große Apertur werden einzelne Punkte des Gegenstandes nur in der Bildebene auch als Punkte abgebildet. Auf Ebenen vor und hinter der Bildebene entsteht statt eines Bildpunktes eine schnell größer werdende Unschärfe- oder Zerstreuscheibe, deren Form von der Gestalt der Blendenöffnung bestimmt ist (vgl. Abb.1 – kreisrunde Lochblende). Unschärfescheiben benachbarter Bildpunkte überlappen sich und ergeben zusammen ein unscharfes Bild.

Verkleinert man die Apertur des Objektivs in Abb.1, so werden auch die Unschärfekreise entsprechend kleiner. Somit vergrößert sich der Bereich vor und hinter der Bildebene, in der das Abbild des Gegenstandes noch scharf erscheint – die Schärfentiefe der Abbildung wird vergrößert.

Im Experiment lässt sich dies untersuchen, indem man die Apertur des Objektivs (der Linse) bei der Abbildung des Pfeiles durch Einfügen einer Blendenkelle in den Strahlengang verkleinert. Durch die Vergrößerung der Schärfentiefe lässt sich dann die Beschriftung auf der Glühlampe lesen, die den Pfeil von der anderen Seite beleuchtet, obwohl deren Bildebene nicht mit der des Pfeiles übereinstimmt.

4.4 Kombination mehrerer Linsen

Hochwertige (Kamera-) Objektive bestehen meist aus einer Kombination vieler Linsen unterschiedlicher Brennweite; die Berechnung dieser Linsensysteme ist kompliziert. Zur Berechnung der resultierenden Brennweite eines Systems aus lediglich zwei dünnen Linsen mit den Brennweiten f_1 und f_2 und dem Abstand d kann jedoch folgende einfache Gleichung herangezogen werden:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 \cdot f_2} \quad (2)$$

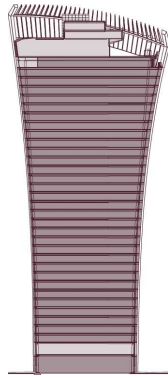


Abbildung 2: Skizze (links) und Bild (rechts) des Hochhauses 20 Fenchurch Street (Quelle: <http://www.20fenchurchstreet.co.uk>)

5 Aufgaben

Zur Vorbereitung:

- 1) Notieren Sie die Definition der Brechung, die Gesetze für Linsenabbildung und Abbildungsmaßstab, und verdeutlichen Sie sich die Abhängigkeiten der Parameter.
- 2) Skizzieren Sie den Strahlengang bei der Abbildung mit einer dünnen Konvexlinse und einer Konkavlinse und bezeichnen Sie die wichtigsten Parameter (Brennweite, Gegenstands- und Bildweite). Was unterscheidet das Bild einer Konvexlinse von dem einer Lupe und dem einer Konkavlinse? Wie verlaufen die Strahlen, wenn der Gegenstand unendlich weit entfernt, aber nicht auf der optischen Achse liegt?
- 3) Stellen Sie in einem Graph den Abbildungsmaßstab β in Abhängigkeit von der Gegenstandsweite $g \in [0 \dots 25 \text{ cm}]$ für eine Linse mit der Brennweite $f = 10 \text{ cm}$ dar.
- 4) Berechnen Sie den Abbildungsmaßstab β , den man bei einer Linse mit $f = 10 \text{ cm}$ für eine Bildweite von $b = 1.5 \text{ m}$ erhält.
- 5) **Für Studierende Bau-/Umweltingenieurwesen/Geodäsie/Angew. Geowiss.:** Das 2014 fertiggestellte Hochhaus *20 Fenchurch Street*, welches im Londoner Bankenviertel steht, hat für einige Schlagzeilen in der Presse gesorgt.¹ Seine gewölbte Glasfront ähnelt einem Ausschnitt aus einem Hohlspiegel mit einem Radius von ungefähr 550 m. Wie Linsen können auch Hohlspiegel zur Fokussierung von Licht verwendet werden. Das auf diese Weise von diesem Gebäude (reflektierende Oberfläche $\propto 8400 \text{ m}^2$) fokussierte Licht soll sogar so intensiv sein, dass einige Sachschäden entstanden sind.
 - a) Bestimmen Sie die Brennweite des vom Gebäude dargestellten Hohlspiegels.
 - b) An einem wolkenfreiem Sommertag beträgt die von der Sonne direkt eingestrahlte Lichtleistung zu einem senkrecht dazu stehendem Objekt etwa 1100 W/m^2 . Schätzen Sie die gesamte vom Gebäude gebündelte Strahlungsleistung ab die auf 200 m^2 gebündelt wird, unter der Annahme, dass rund 20% des Lichts reflektiert wird und die Position der Sonne einen Winkel von 60° mit dem Horizont einnimmt. Vergleichen Sie diesen Wert mit anderen aus dem Alltag bekannten Leistungswerten.

Präsenzaufgaben:

- 6) Bestimmen Sie die Brennweite einer Sammellinse nach folgendem Messverfahren: Zunächst bildet man einen Gegenstand (Pfeilmuster) mit der Linse scharf auf einem Projektionsschirm ab. Dann misst man die Gegenstandsweite g und die Bildweite b und bestimmt die Brennweite f der Linse nach

¹ Vgl. z. B. Artikel auf [Spiegel Online](#) oder [FAZ](#).

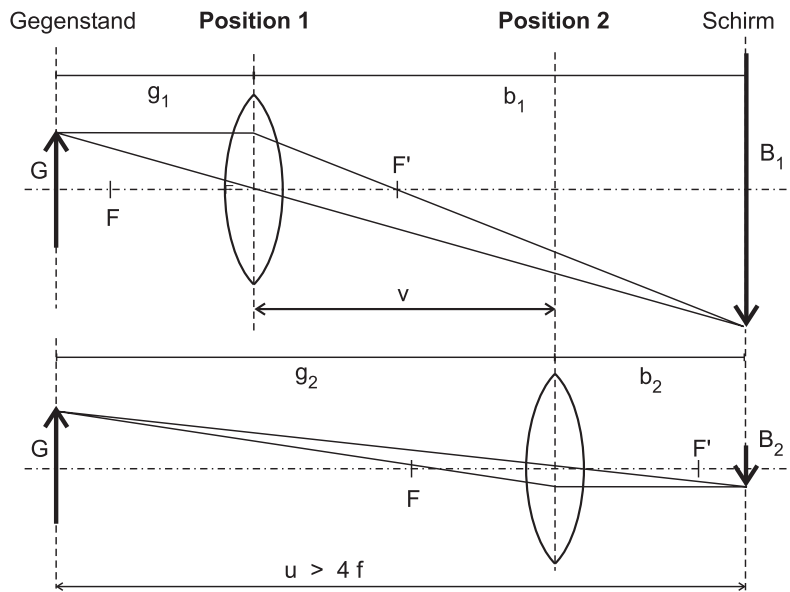


Abbildung 3: Bessel'sches Verschiebepverfahren

Gleichung (1) **Achtung:** Die Lage der Linsenmitte stimmt im allgemeinen nicht mit dem Indexstrich am Reiter überein. Messunsicherheiten nicht vergessen!

- 7) Bestimmen Sie den Abbildungsmaßstab als das Verhältnis der Bildgröße B zur Gegenstandsgröße G für die Einstellungen aus Aufgabe 6. Vergleichen Sie diesen experimentellen Befund β_{exp} mit $\beta = b/g$ aus den zugehörigen Werten g und b . Was könnte für mögliche Abweichungen verantwortlich sein?
- 8) Bestimmen Sie die Brennweite derselben Linse nach dem *Bessel'schen Verschiebepverfahren*: Bei konstantem Abstand zwischen Gegenstand und Projektionsschirm von $u > 4f$ (warum?) gibt es zwei Positionen, in denen die Linse ein scharfes Bild (unterschiedlicher Größe) des Gegenstandes auf dem Schirm erzeugt (vgl. Abb. 3). Nach Bestimmung des Verschiebeweges v zwischen diesen beiden Positionen kann man mit den folgenden Beziehungen die Brennweite der Linse errechnen:

$$u - v = g_1 + b_2 \qquad u + v = g_2 + b_1 \qquad (3)$$

$$g_1 = \frac{u - v}{2} \qquad b_1 = \frac{u + v}{2} \qquad (4)$$

Durch Einsetzen in das Linsenabbildungsgesetz erhält man:

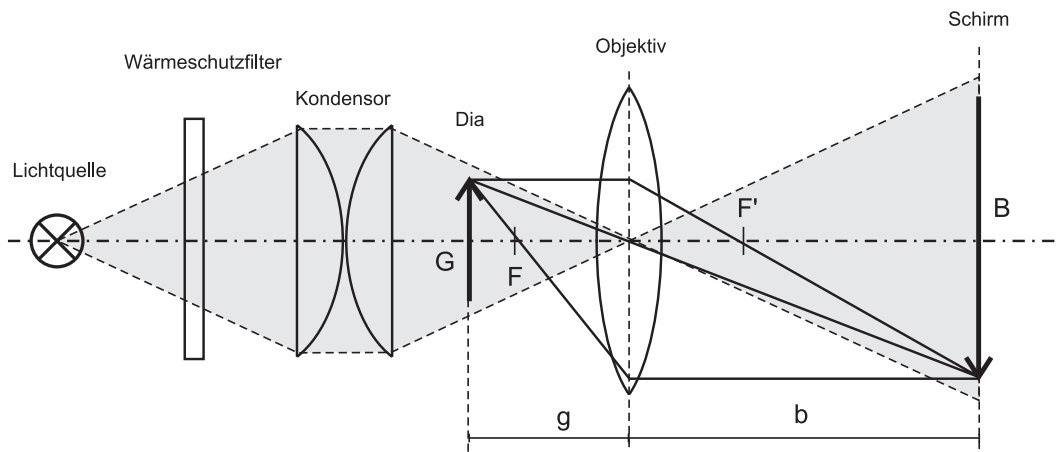
$$4 \cdot f = u - \frac{v^2}{u} \qquad (5)$$

Was ist der Vorteil dieses Verfahrens? Betrachten Sie die Messunsicherheiten.

- 9) Bilden Sie den gepunkteten Pfeil auf dem Schirm ab, und verkleinern Sie dann mittels Blendenkelle die Apertur der Abbildungslinse (vgl. Abb. 1). Welche Effekte lassen sich beobachten?

Anmerkung: Das „Objektiv“ einer Lochkamera ist also gleichwertig zu einer Linse mit $f = \infty$ und sehr kleiner Apertur. Warum lässt sich die Schärfe einer optischen Abbildung nicht durch entsprechende Verkleinerung der Apertur beliebig steigern?

- 10) Bilden Sie den Pfeil mit einem System aus zwei Linsen (der bereits verwendeten und einer weiteren Linse) auf dem Schirm ab, und berechnen Sie die Brennweite der zweiten Linse nach Gl.(2). Welches der beiden Messverfahren (vgl. Aufg. 6 und 8) bietet sich hierfür an?



11) Bauen Sie aus den vorhandenen Teilen einen Projektionsapparat, und bilden Sie ein Dia möglichst groß und scharf auf dem Schirm ab. Kontrollieren Sie experimentell die Rechnung aus Aufgabe 4).

Der Projektionsapparat (Dia-Projektor) besteht im grundsätzlichen aus folgenden Teilen: Lichtquelle, Kondensator, Diapositiv und Objektiv. Die Abbildung mit einem Projektionsapparat unterliegt den geometrischen Linsenabildungsgesetzen. Von Bedeutung ist jedoch die Unterscheidung zwischen dem abbildenden und dem beleuchtenden Strahlengang, um zu vermeiden, dass das Bild der Lichtquelle die Abbildung des Diapositivs überlagert. Zur Abbildung können nur Strahlen beitragen, die sowohl Dia als auch Objektiv durchlaufen (Abb. 4). Durch den Kondensator wird eine Vergrößerung des Gesichtsfeldes erreicht; bildet man die Lichtquelle ins Objektiv ab, so wirkt der Rahmen des Diapositivs als Gesichtsfeldblende.

Messunsicherheiten

Hinweis zu den Unsicherheitsangaben, Aufgabe 10:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 \cdot f_2}$$

Berechnung der Unsicherheit Δf_2 , der aus den geschätzten Unsicherheiten Δf_1 , Δf und Δd resultiert:

$$\Delta f_2 = \sqrt{\left\{ \frac{f \cdot (d-f)}{(f_1-f)^2} \cdot \Delta f_1 \right\}^2 + \left\{ \frac{f_1 \cdot (f_1-d)}{(f_1-f)^2} \cdot \Delta f \right\}^2 + \left\{ \frac{f}{f_1-f} \cdot \Delta d \right\}^2} \quad (6)$$