TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Resonanzkurven

1 Vorbereitung

- Physikalische Größen der Rotationsbewegung, Zusammenhang zwischen Drehmoment, Winkelbeschleunigung und Trägheitsmoment, Analogien zur Translationsbewegung
- Freie Schwingungen mit und ohne Dämpfung, Eigenfrequenz, Amplitudenverlauf, Dämpfungskonstante; erzwungene Schwingungen, Resonanzkurven, Phasendifferenz
- Wirbelströme, Wirbelstromdämpfung, Energiedissipation
- Funktionsweise eines Oszilloskops

Schauen Sie auch auf die Webseite der Abteilung Mechanik des Grundpraktikums. Dort finden Sie Fotos vom Aufbau und weitere Informationen.

2 Literatur

Kapitel zur Mechanik in allen Lehrbüchern der Physik.
Weiterführende Literatur zur Physik des Versuches finden Sie in der Literaturmappe (nur als PDF; zugänglich über das Web-Portal des Grundpraktikums).

3 Mitzubringen

Millimeterpapier, einfach-logarithmisches Papier (2 Dekaden; als Download auf der Webseite des Grundpraktikums verfügbar)

4 Grundlagen

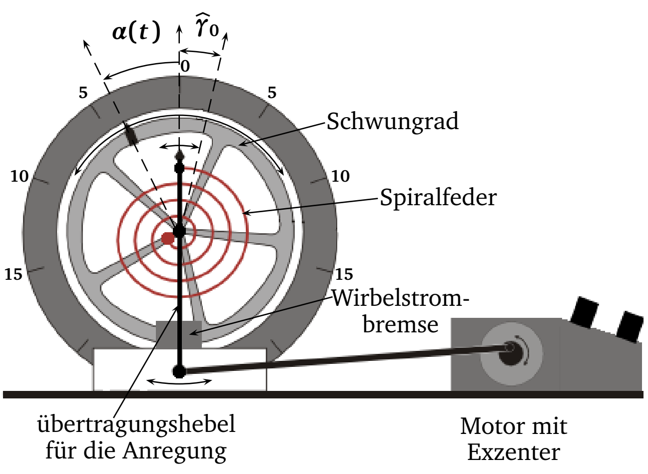

Abbildung 1: Versuchsskizze

Ein Drehpendel besteht aus einem möglichst reibungsfrei gelagerten Drehkörper (Schwungrad) mit dem Trägheitsmoment I, der durch ein elastisches Element (z. B. eine Spiralfeder) in seiner Gleichgewichtslage gehalten wird. Bei Auslenkung aus dieser Lage um den Winkel α wirkt die Feder mit dem rücktreibenden, der Auslenkung proportionalen Moment $M_D = -D^*\alpha$ (der Proportionalitätsfaktor D^* ist das *Richtmoment*) auf das Schwungrad ein. Dessen Bewegung ist gedämpft infolge eines geschwindigkeitsabhängigen Bremsmomentes M_R, das in vielen Fällen (z. B. bei Luftreibung oder Wirbelstromdämpfung) einfach der Winkelgeschwindigkeit proportional ist: $M_R = -\varrho\, \mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}t$. Das einmal angestoßene Pendel vollführt gedämpfte *freie* Schwingungen. Wird nun die Aufhängung der Spiralfeder zusätzlich von außen mit einer Auslenkung $\gamma_0(t) = \widehat{\gamma}_0 \cos(\omega_a t)$ periodisch bewegt, so wird das Pendel zu *erzwungenen Schwingungen* angeregt, die nach Abklingen eines komplizierten Einschwingvorgangs mit der Kreisfrequenz ω_a der äußeren Anregung erfolgen. Das Diagramm der Abhängigkeit der Schwingungsamplitude $\widehat{\alpha}$ von der Erregerfrequenz ω_a mit einem Maximum in der Nähe der Eigenfrequenz ω_0 des freien Pendels (*Resonanz*) wird als *Resonanzkurve* bezeichnet.

Quantitativ werden die Zusammenhänge durch die dynamische Grundgleichung für die Rotation beschrieben. Das rückstellende Drehmoment M_D wird dabei von der Differenz der Auslenkung des Schwungrades $\alpha(t)$ zur momentanen Auslenkung der Federaufhängung $\gamma_0(t)$ bestimmt:

$$I \cdot \frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2} = M_D + M_R = -D^*[\alpha - \widehat{\gamma}_0 \cos(\omega_a t)] - \varrho \cdot \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$

bzw.

$$\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\varrho}{I}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} + \frac{D^*}{I}\alpha = \frac{D^*\widehat{\gamma}_0}{I}\cos(\omega_a t). \tag{2}$$

Die Lösung dieser Schwingungsdifferenzialgleichung, d. h. das Aufsuchen der Funktionen $\alpha(t)$, die der Gleichung für die verschiedenen Situationen genügen, ist ein rein mathematisches Problem. Die Ergebnisse werden hier ohne Beweis angegeben. Von ihrer Richtigkeit kann man sich durch ihr Einsetzen in Glg. (1) überzeugen.

4.1 Die ungedämpfte freie Schwingung: $\varrho = 0$, $\widehat{\gamma}_0 = 0$

Hierfür folgt aus Glg. (1):

$$\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{D^*}{I}\alpha\,; \tag{3}$$

d. h. die gesuchte Funktion $\alpha(t)$ muss der Forderung genügen, dass ihre zweite Ableitung (unter Umkehr des Vorzeichens) ihr selbst proportional ist. Unter den elementaren Funktionen erfüllen diese Bedingung nur der Sinus und der Cosinus.

Überzeugen Sie sich, dass der allgemeine Ansatz

$$\alpha(t) = a_1 \cos(\omega_0 t) + a_2 \sin(\omega_0 t) \tag{4}$$

der Glg. (3) genügt, sofern folgende Bedingung für die Kreisfrequenz erfüllt ist:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D^*}{I}} \tag{5}$$

Für die Schwingungsdauer T_0, bzw. die Eigenfrequenz $\nu_0 = 1/T_0$, folgt daraus mit der Forderung, dass der Zeitperiode $t = T_0$ die Periode $\omega_0 T_0 = 2\pi$ im Argument der Winkelfunktionen entspricht:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \qquad \text{und} \qquad \nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad . \tag{6}$$

Die Vorfaktoren (d.h. die Integrationskonstanten) a_1 und a_2 in Glg. (4) werden durch die Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$ bestimmt. So ist: $\alpha(0) = \alpha_0$ und $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_1 = \alpha_0$ und $a_2 = 0$.

4.2 Die gedämpfte freie Schwingung: $\varrho > 0$, $\widehat{\gamma}_0 = 0$

Mit den Anfangsbedingungen $\alpha(0) = \alpha_0$ und $\left.\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0$ lautet die Lösung von Glg. (1) im sog. Schwingfall (Nebenbedingung: $\beta < \omega_0$)

$$\alpha(t) = \alpha_0 e^{-\beta t} \cos \omega_e t \tag{7}$$

mit der Dämpfungskonstante

$$\beta = \varrho/(2I) \tag{8}$$

und der Eigenkreisfrequenz:

$$\omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \tag{9}$$

Die Dämpfung bewirkt also eine Herabsetzung der Eigenfrequenz.

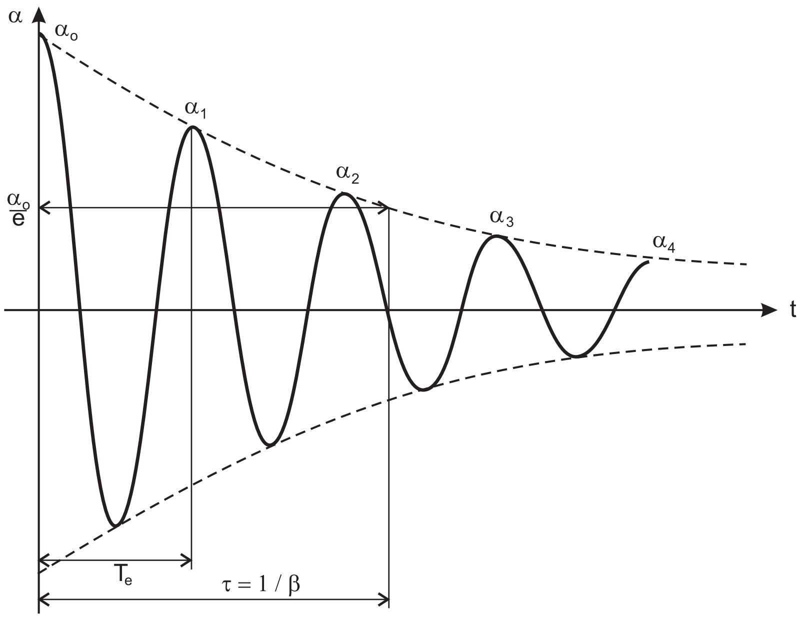

Abbildung 2: Die gedämpfte freie Schwingung

Der Kehrwert $\tau = 1/\beta$ der Dämpfungskonstante ist die *Relaxationszeit*, innerhalb der die Amplitudenhüllkurve auf den Wert α_0/e abklingt (vgl. Abbildung).

Aus einer einfachen Extremalrechnung folgt, dass die positiven Umkehrpunkte der Schwingung bei den Zeiten $t_n = n\frac{2\pi}{\omega_e} = nT_e$ $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ liegen. Einsetzen von t_n in Glg. (7) ergibt für die Ausschläge

$$\alpha_n = \alpha_0 \, e^{-n\beta T_e} \quad . \tag{10}$$

und für das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender gleichsinniger Ausschläge den konstanten Wert

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} = e^{\beta T_e} \quad . \tag{11}$$

Daraus lässt sich die Dämpfungskonstante berechnen gemäß:

$$\beta = \frac{1}{T_e} \ln \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}. \tag{12}$$

4.3 Die erzwungene Schwingung: $\varrho > 0$, $\widehat{\gamma}_0 > 0$

Nach Abklingen des Einschwingvorgangs schwingt das Pendel mit der Erregerfrequenz ω_a. Die Schwingung eilt der Anregung $\gamma(t)$ um die Zeit Δt nach, d. h. sie ist gegenüber der Anregung um $\varphi = \omega_a \Delta t$ *phasenverschoben*. Einsetzen des entsprechenden Ansatzes

$$\alpha = \widehat{\alpha} \cos(\omega_a t - \varphi) \tag{13}$$

in Glg. (1) führt nach einigen Umrechnungen (siehe z. B. bei Walcher) auf die Amplitude

$$\widehat{\alpha} = \frac{D^* \widehat{\gamma}_0}{I \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_a^2)^2 + (2\beta\omega_a)^2}} \tag{14}$$

und die Phasenverschiebung

$$\varphi = \arctan \frac{2\beta\omega_a}{\omega_0^2 - \omega_a^2} \tag{15}$$

mit ω_0 nach Glg. (5) und β nach Glg. (8).

Aus Glg. (14) folgt, dass das Resonanzmaximum bei der Kreisfrequenz

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \tag{16}$$

liegt und mit zunehmender Dämpfung (in der Praxis nur geringfügig) zu kleineren Werten verschoben wird. Beachten Sie, dass ω_r weder mit der Eigenfrequenz des ungedämpften [Glg. (5)] noch mit der des gedämpften freien Pendels [Glg. (8)] exakt übereinstimmt.

Die Form der Resonanzkurve hängt ebenfalls von der Dämpfung ab: Je stärker die Dämpfung, desto niedriger liegt das Resonanzmaximum, d. h. desto flacher verläuft die Kurve.

Energiedissipation

Nach Abklingen des Einschwingvorgangs, schwingt das Pendel also mit konstanter Amplitude $\widehat{\alpha}$ und der Erregerfrequenz ω_a. Deshalb wird die Gesamtenergie im System im zeitlichen Mittel über eine Periode konstant sein. Trotzdem wird durch die Dämpfung (Wirbelstrombremse) ständig potentielle und kinetische Energie in Wärme umgewandelt. Diesen Vorgang nennt man *Energiedissipation*. Damit die Gesamtenergie im System im Mittel unverändert bleibt, muss also die in einer Periode T_a dissipierte Energie gleich der im selben Zeitraum durch das anregende Drehmoment am Schwingungssystem geleisteten Arbeit sein. Wenn sich die Federaufhängung also um den kleinen Winkel $\mathrm{d}\gamma_0$ bewegt, ergibt sich aus dem dort angreifenden Drehmoment $M_{\gamma_0} = -D^*(\alpha - \gamma_0)$ die geleistete Arbeit $\mathrm{d}W = M_{\gamma_0}\,\mathrm{d}\gamma_0$ (analog zu "Kraft · Weg" bei linearen Bewegungen) und entsprechend ergibt die Verlustleistung $P = \mathrm{d}W/\mathrm{d}t$ über eine Periode gemittelt:

$$\overline{P} = \overline{\dot{W}} = \frac{1}{T_a} \int_0^{T_a} M_{\gamma_0}(t) \frac{\mathrm{d}\gamma_0(t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \tag{17}$$

Da das Integral über $\gamma_0(t) \cdot \mathrm{d}\gamma_0(t)/\mathrm{d}t$ über eine Periode verschwindet (einsetzen!) ergibt sich:

$$\overline{P}(\omega_a) = \frac{\widehat{\alpha}\widehat{\gamma}_0 D^*}{T_a} \omega_a \int_0^{T_a} \cos(\omega_a t - \varphi) \sin(\omega_a t)\,\mathrm{d}t \tag{18}$$

$$= \frac{\widehat{\alpha}\widehat{\gamma}_0 D^*}{T_a} \omega_a \left(\cos(\varphi) \underbrace{\int_0^{T_a} \cos(\omega_a t) \sin(\omega_a t)\,\mathrm{d}t}_{=0} + \sin(\varphi) \underbrace{\int_0^{T_a} \sin^2(\omega_a t)\,\mathrm{d}t}_{=T_a/2} \right) \tag{19}$$

Mit Gln. (14) und (15) ergibt sich so (nachrechnen!):

$$\overline{P}(\omega_a) = \frac{\widehat{\alpha}\,\widehat{\gamma}_0 D^*}{2}\,\omega_a\,\sin(\varphi) = I\beta\,\omega_a^2\,\widehat{\alpha}^2, \tag{20}$$

das heißt die dissipierte Energie ist $\propto \omega_a^2\,\widehat{\alpha}^2$. Setzt man hier wiederum Gln. (14) ein, ergibt sich:

$$\overline{P}(\omega_a) = I\beta\,\omega_a^2\,\widehat{\alpha}^2 = \frac{\widehat{\gamma}_0^2 D^{*2}}{4\beta I}\,\frac{(2\beta\,\omega_a)^2}{(\omega_0^2-\omega_a^2)^2+(2\beta\,\omega_a)^2} \tag{21}$$

Diese Funktion hat im Gegensatz zum Amplitudenverlauf $\alpha(\omega_a)$ ihr Maximum stets bei $\omega_a = \omega_0$ *unabhängig* von der Dämpfung β. Der Maximalwert ist $\overline{P}_{\max} = \widehat{\gamma}_0^2 D^{*2}/(4\beta I)$. Für sehr große und sehr kleine Werte von ω_a fällt $\overline{P}(\omega_a)$ auf Null ab. Mit Hilfe derjeniger Frequenzwerte, bei denen $\overline{P}(\omega_a)$ auf die Hälfte des Maximalwertes abgefallen ist, definiert man die *Halbwertsbreite* des Dissipationsspektrums. Diese Halbwertsbreite $\Delta\omega_{1/2}$ ist direkt mit der Dämpfung verknüpft ("starke Dämpfung" $\widehat{=}$ "breites Spektrum") und es gilt:

$$\Delta\omega_{1/2} = 2\,\beta. \tag{22}$$

5 Aufgaben

1. **Hausaufgabe (vor dem Versuch zuhause erledigen!):** a) Machen Sie sich anhand des Anleitungsblattes und ggf. weiterer Literatur mit den verschiedenen Lösungen der Differenzialgleichung (1) vertraut (nur qualitativ, kein explizites Rechnen). Was versteht man unter den Begriffen *Schwingfall, Kriechfall, aperiodischer Grenzfall*? Skizzieren Sie den Verlauf der Resonanzkurven und die Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung für schwache und für starke Dämpfung.
   b) **Physiker BSc./LaG:** Bestimmen Sie die Halbwertsbreite des Dissipationsspektrums gemäß Glg. (21), d. h. leiten Sie Glg. (22) aus Glg. (21) her.

2. Ermitteln Sie die Eigenfrequenz des Drehpendels mit Hilfe des Oszilloskops einmal ohne und einmal mit Wirbelstromdämpfung (Stromstärke nach Angaben des Betreuers). Lenken Sie hierzu das Pendel auf $\alpha_0 = 19$ Skt. aus und lassen Sie es schwingen. Das Oszilloskop zeigt die Auslenkung des Drehpendels mittels berührungsloser Sensoren an. Die Frequenz kann direkt abgelesen werden. *Tipp:* Nutzen Sie die "RUN/STOP"-Funktion. Führen Sie das Experiment mindestens fünf mal durch und bilden Sie den Mittelwert. Bestimmen Sie die Unsicherheit Ihres Ergebnisses (Beachten Sie die Hinweise des Betreuers).

3. Bestimmen Sie die Dämpfungskonstante β ohne und mit Wirbelstromdämpfung. Lenken Sie hierzu das Pendel wieder auf $\alpha_0 = 19$ Skt. aus und messen Sie dann die Folge der Ausschläge mit dem Oszilloskop (mind. 8 Werte). Nutzen Sie hierfür die Cursorfunktion des Oszilloskops im Modus "Spur" und bei Bedarf die Zoom-Funktion (Knöpfe "SCALE" und "POSITION") Stellen Sie die Folge der Ausschläge auf einfach-logarithmischem Papier dar und ermitteln Sie jeweils die Dämpfungskonstante β graphisch aus der Steigung einer Ausgleichsgeraden (Glg. (12)).

4. **Physiker BSc/LaG:** Bestimmen Sie mit Wirbelstromdämpfung das Dissipationsspektrum $\overline{P}(\omega_a)$ indem Sie $\omega_a^2\,\widehat{\alpha}^2$ gegen die Erregerfrequenz ω_a auf Millimeterpapier auftragen. Nehmen Sie dazu wenigstens 12 Werte bei geeigneten Frequenzen auf (vgl. Aufg. 2 und 3). Bestimmen Sie grafisch die Halbwertsbreite der Kurve und überprüfen Sie die Beziehung $\Delta\omega_{1/2} = 2\,\beta$.

   Nicht-Physiker: Erstellen Sie mit Wirbelstromdämpfung die Resonanzkurve als Funktion der Erregerfrequenz ω_a auf Millimeterpapier. Nehmen Sie dazu wenigstens 12 Werte bei geeigneten Frequenzen auf.