E7

Physikalisches Grundpraktikum
Abteilung Elektrizitätslehre

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Elektrostatische Felder

1 Vorbereitung

- Ladung
- Feldstärke
- Potenzial
- Kapazität
- Kondensatoren
- Gauß'scher Integralsatz
- Verwendung von einfach-logarithmischem Papier

1.1 Literatur

- Gerthsen *Physik*
- Alonso-Finn *Physik*
- Westphal *Physikalisches Praktikum*
- Bergmann-Schäfer Bd. 2 *Elektrizitätslehre und Magnetismus*
- Hering–Martin–Stohrer *Physik für Ingenieure*
- Merkblatt .A., *Auswertung physikalischer Messungen*

Ergänzende Literatur: Jackson *Klassische Elektrodynamik*.

1.2 Teileliste

1 Transistorvoltmeter, 1 Spannungsquelle, 1 Experimentierbrett mit zwei Elektrodenbildern.

Schauen Sie auch nach der Abteilung Elektrik in den Webseiten des Grundpraktikums

Mitzubringende Hilfsmittel:
2 Blatt Millimeterpapier, 1 Blatt einfach-logarithmisches Papier (1 Dekade).

2 Grundlagen in Kurzform:

2.1 Ladung, Feld, Gauß'scher Satz

Ruhende elektrische Ladungen erzeugen ein elektrostatisches Feld $\vec{E}$, das je nach Ladungsverteilung von Ort zu Ort variieren kann. $\vec{E}(\vec{r})$ lässt sich anschaulich durch Feldlinien darstellen. Der Verlauf der Feldlinien ist so definiert, dass sie an positiven Ladungen beginnen und an negativen Ladungen enden. Die Feldlinie läuft am Ort $\vec{r}$ in diejenige Richtung, in die der Feldvektor $\vec{E}(\vec{r})$ zeigt.

Salopp ausgedrückt, gehen von einer verdoppelten (positiven) Ladung „doppelt soviele" Feldlinien aus wie von der einzelnen Ladung. Das Maß für die „Feldlinien-Anzahl" ist der elektrische Fluss:

$$\text{Elektrischer Fluss} = \int_{\text{Oberfläche}} \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot \mathrm{d}A \tag{1}$$

Integrationsgebiet ist die *geschlossene* Oberfläche eines Volumens im Raum. ($\vec{n}$: Normalenvektor der Länge 1; dA: infinitesimales Flächenelement)

Dieser ist über den Gauß'schen Satz verknüpft mit der das Feld verursachenden Ladungsverteilung:

$$\int_{\text{Oberfläche}} \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot \mathrm{d}A = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \varrho(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}^3 r = \frac{Q_{\text{ges}}}{\varepsilon_0} \tag{2}$$

(V: von der Oberfläche umschlossenes Volumen; $\varrho(\vec{r})$: Ladungsdichte im Volumen V; ε_0: Dielektrizitätskonstante des Vakuums.)

2.2 Elektrostatisches Potenzial

Gibt man eine so genannte *Probeladung* q in dieses elektrische Feld, so wirkt auf sie die Feldkraft $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$. Die Feldkraft $\vec{F}$ zeigt wie das Feld $\vec{E}$ an jedem Ort tangential zur dortigen Feldlinie.

Bewegt man q entlang einer Feldlinie vom Ort $\vec{r}_1$ zum Ort $\vec{r}_2$, so verrichtet man mechanische Arbeit. Die an der Ladung verrichtete Arbeit W wird als potenzielle Energie gespeichert. Sie wird wieder frei, wenn die Probeladung zum Ort $\vec{r}_1$ zurückkehrt.

$$W = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -q \cdot \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = q \cdot (\Phi(\vec{r}_2) - \Phi(\vec{r}_1)) = q \cdot \Delta\Phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = q \cdot U(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \tag{3}$$

Man nennt $\Phi(\vec{r})$ das elektrostatische Potenzial, deshalb heißt U nicht nur „elektrische Spannung", sondern auch Potenzialdifferenz zwischen jeweils *zwei* Orten.

Auf Flächen, die stets senkrecht zu den Feldlinien verlaufen, bleibt das elektrische Potenzial konstant; sie heißen Äquipotenzialflächen (d.h. Flächen einheitlichen Potenzials).

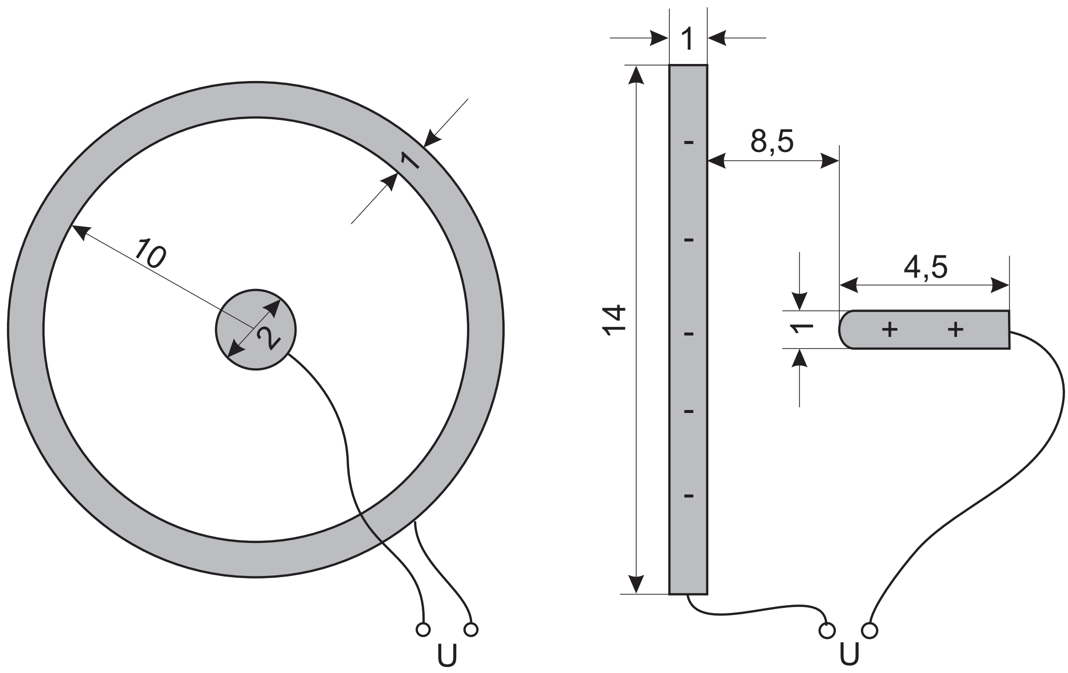
2.3 Das elektrische Feld im Inneren eines Leiters

Im vorliegenden Experiment wird ausgenutzt, dass die Potenzialverteilung (und deshalb auch der Verlauf der elektrischen Feldlinien) im elektrischen Strömungsfeld im Inneren eines *homogenen Leiters* dieselbe ist wie in einem ladungsfreien Raum. Dies liegt am (verallgemeinerten) Ohm'schen Gesetz

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E} \quad , \tag{4}$$

bei dem die spezifische Leitfähigkeit σ den Transport von Ladung (Stromdichte $\vec{j}$) proportional zum elektrischen Feld macht. Im Fall von stationären Strömen ergibt sich dann aus der sogenannten Kontinuitätsgleichung $\mathrm{div}\vec{j} = -\dot{\varrho} = 0$, dass eine stationäre Ladungsdichte ϱ dort entsteht, wo die Leitfähigkeit sich ändert, z.B. also am übergang von den Metallelektroden zum Kohlepapier. Auf diese stationäre Ladungsverteilung lässt sich der Gauß'sche Satz dann anwenden wie im elektrostatischen Fall.

Zur Messung der Potenzialverteilung wird im Experiment ein hochohmiges Kohlepapier verwendet, auf das gut leitende Metallelektroden gepresst sind. Damit lässt sich die zweidimensionale Potenzialverteilung zu solchen quasi-zweidimensionalen Elektrodenanordnungen experimentell bestimmen, deren Feldlinien ausschließlich *in* der Ebene verlaufen. Die Leitfähigkeit des Kohlepapiers ist klein gegen die der Metallelektroden, an deren Rand der Stromfluss im *homogenen Leiter* „Kohlepapier" beginnt bzw. endet. Deshalb ist der Rand jeder Elektrode eine Äquipotenzialfläche, genau wie bei leitfähigen Elektroden in der Elektrostatik.



Versuchsaufbau (Prinzipskizze); alle Maße sind in Zentimetern angegeben!

3 Versuchsbeschreibung

Die Elektroden werden an eine konstante Potenzialdifferenz (=Spannung) angeschlossen. Die zweidimensionale Potenzialverteilung bestimmt man dadurch, dass man einen hochohmigen Spannungsmesser (Innenwiderstand groß gegen den Widerstand zwischen den Elektroden; z.B. Transistorvoltmeter mit $R_\mathrm{i} = 10\,\mathrm{M\Omega}$) mit einem Pol an eine der beiden Elektroden und mit dem anderen Pol an eine bewegliche Sonde anschließt. Mit der Sondenspitze wird die Oberfläche des Kohlepapiers abgetastet. Die angezeigte Spannung ist das Potenzial an dem abgetasteten Punkt, bezogen auf die angeschlossene Elektrode.

Wichtiger Hinweis:
Vermeiden Sie Beschädigungen des Kohlepapiers durch Aufstützen, feuchte Finger, Kratzen, usw.. . .

4 Aufgaben

1. **Schon als Vorbereitung zu Hause durchführen:**
   a) **(Für Studiengang Biologie freiwillig, für alle anderen obligatorisch)** Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß'schen Satzes (unter Ausnutzung der Zylindersymmetrie) Feldverteilung und Feldstärken im Inneren eines Zylinderkondensators mit der Zylinderlänge L.
   Hinweise:
   - Für die Mantelfläche eines Zylinder ist das Oberflächenelement in Zylinderkoordianten: $dA = r\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$
   - Vernachlässigen Sie die Randeffekte
   - Bedenken Sie, dass gilt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ für $\vec{a} \perp \vec{b}$
   Für Studiengang Biologie: Skizzieren sie den Feldverlauf im inneren eines Zylinderkondensators. Wieso vereinfacht die Integration über die Oberfläche eines Zylinders die Berechnung des E-Feldes mit Gl. (2)?

   b) **(Für alle obligatorisch!)** Leiten Sie nun mit dem Ergebnis der Aufgabe a)

$$E = \frac{Q}{2\pi \cdot r \cdot L \cdot \varepsilon_0} \quad , \quad r_\mathrm{i} \leq r \leq r_\mathrm{a} \tag{5}$$

den Potenzialverlauf $\Phi(r)$ für den Zylinderkondensator unter den Randbedingungen $\Phi(r_\mathrm{i}) = \Phi_\mathrm{i}$ und $\Phi(r_\mathrm{a}) = 0$ her. Mithilfe der Randbedingungen lässt sich die für Sie unbekannte Ladung Q eliminieren. Leiten Sie hieraus einen Ausdruck für die Spannung $U(r)$ her.

Berechnen Sie damit die Kapazität des Zylinderkondensators mit Innen- bzw. Außenelektroden-Radius r_i bzw. r_a und Länge L.

2. Bestimmen Sie am Modell der dreidimensionalen Anordnung **Schneide gegen Platte**:

   a) den Verlauf der Äquipotenziallinien $U = 1\,\mathrm{V}$, $3.5\,\mathrm{V}$, $6\,\mathrm{V}$ und $8\,\mathrm{V}$. Abtastbereich, Punktabstand und graphische Darstellung nach Hinweisen der betreuenden Assistenten. Skizzieren Sie den Verlauf einiger charakteristischer Feldlinien.

   b) den Potenzialverlauf längs der Symmetrielinie zwischen Schneide und Platte. Abstand der Abtastpunkte: 5 mm, sowie je ein zusätzlicher Abtastpunkt ca. 2.5 mm und 1 mm vor der *Schneide*, graphische Darstellung der gemessenen Spannungswerte $U(a)$ über dem Abstand a von der Schneide. Bestimmen Sie die beiden Feldstärke $|\vec{E}| = \left|\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}a}\right|$ unmittelbar an der Schneide und der Platte aus der Kurvensteigung bei $a = 0\,\mathrm{mm}$ und $a = 85\,\mathrm{mm}$ und erklären Sie den Unterschied.

   c) **Hausaufgabe für Studiengang Bauingenieurwesen, Geodäsie, Unweltingenieurwesen, Angew. Geowiss.**
   Eine Gewitterwolke mit $10\,\mathrm{km}^2$ Gesamtfläche bildet zusammen mit der Erdoberfläche einen Plattenkondensator. Eine Entladung durch die Luft steht unmittelbar bevor (Feldstärke $E = 1\,\frac{\mathrm{MV}}{\mathrm{m}}$). Wie lange dauert die Entladung, wenn die mittlere Stromstärke des Blitzes 10 kA beträgt? Bestimmen Sie zusätzlich die Ladung eines kugelförmigen Wassertropfens mit 2 Millimeter Durchmesser, welches vor der Entladung zwischen Wolke und Erde schwebt.

   Hinweis: Kräftegleichgewicht
   Gravitationskraft $F_\mathrm{G} = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot g$, wobei ρ die Dichte des Wassers und $g = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ die Erdbeschleunigung ist. Die elektrische Feldkonstante ist gegeben durch $\epsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}$.
   Welche Eigenschaften muss ein Blitzableiter demnach aufweisen, um ein Gebäude vor einem Blitzeinschlag zu bewahren?

3. Messen Sie die Spannungsverteilung $U(r)$ am Modell des **Zylinderkondensators** entlang von vier Radien (vom Mittelpunkt nach außen).

Abstand der Abtastpunkte:	10 mm .
Abmessungen des Kondensators:	Radius der inneren Elektrode $r_\mathrm{i} = 10\,\mathrm{mm}$
	Innenradius der Außenelektrode $r_\mathrm{a} = 100\,\mathrm{mm}$

   Tragen Sie die *gemittelten* Potenzialwerte in einfach-logarithmischer Darstellung (Abszisse logarithmisch eingeteilt) über r/r_a auf.

   – Wie lautet demnach die Gleichung für den Potenzialverlauf in Abhängigkeit von $r, r_\mathrm{i}, r_\mathrm{a}$ und der Gesamtspannung U_0 ?

   – Vergleichen sie dieses Ergebnis mit dem Ergebnis aus Aufgabe 1b!