TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Merkblatt: Auswertung physikalischer Messungen

1 Literatur

[1] **Skript:** *Einführung in die Messdatenanalyse* zum Download auf den Webseiten des Grundpraktikums

[2] **Grundlagen:** T. Bornath, G. Walter, *Messunsicherheiten – Grundlagen für das physikalische Praktikum*, Springer Spetrum, Wiesbaden, 2020; auch als EBook!

[3] **Anwendungen:** T. Bornath, G. Walter, *Messunsicherheiten – Anwendungen für das physikalische Praktikum*, Springer Spetrum, Wiesbaden, 2020; auch als EBook!

[4] **GUM:** JCGM ISO/IEC Guide 98-3:2008: Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (GUM), JCGM 100, 2008.

Dieses Merkblatt kann zwangsläufig nur „rezeptartig“ knappe Hinweise zur Auswertung geben, ohne auf Herleitungen aus der Theorie der Messunsicherheiten einzugehen. Zur näheren Erläuterung stehen Ihnen die Praktikumsassistenten zur Verfügung. Benutzen Sie bitte auch das ausführlichere Skript zur Messdatenanalyse und die darin angegebene Lehrbuch- und Originalliteratur.

2 Messunsicherheiten

Physikalische Messungen sind grundsätzlich mit Unsicherheiten behaftet. *Messunsicherheit* bezeichnet dabei nach dem GUM (von der ISO herausgegebener Leitfaden: **G**uide to the Expression of **U**ncertainty in **M**easurement) einen Parameter, der dem Messergebnis beigeordnet ist und der die Streuung derjenigen Schätzwerte kennzeichnet, die einer Messgröße auf der Basis vorliegender Information vernünftiger Weise zugewiesen werden können.

Dabei werden zwei Arten von Unsicherheiten unterschieden: **Typ A** Unsicherheiten sind solche, die aus mehrfach wiederholten Messungen unter gleichen Bedingungen ermittelt werden. **Typ B** Unsicherheiten stammen aus anderen Quellen, z.B. aus Gerätespezifikationen, Kalibrierscheinen, der Literatur oder u.U. auch aus der Erfahrung des Experimentators. Das Besondere an den Verfahren des GUM ist dabei, dass beide Arten von Unsicherheiten u_A und u_B letztendlich auf die selbe Art gehandhabt und als kombinierte Gesamtunsicherheit:

$$u_{\text{ges}} = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} \tag{1}$$

zusammen mit dem besten Schätzwert für das Messergebnis $\widehat{x}$ einer Messgröße X angegeben werden:

$$\widehat{x} \pm u_{\text{ges}}(\widehat{x}) \tag{2}$$

2.1 Typ A Messunsicherheit

Bei einer wiederholten Messung der Größe X unter gleichen Bedingungen streuen die einzelnen Messwerte x_i um einen Mittelwert μ. Dieses Verhalten wird für viele physikalisch relevante Fälle durch die *Gauß'sche Normalverteilung* beschrieben:

$$\mathcal{N}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \tag{3}$$

mit $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{N}(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Diese Funktion beschreibt eine glockenförmige Kurve, deren Maximum bei μ und deren Wendepunkte bei $\mu \pm \sigma$ liegen. Dabei beschreibt σ die Standardabweichung der Verteilung. Bei einer Normalverteilung befinden sich 68 % aller Messwerte innerhalb der durch die Standardabweichung angegebenen Grenzen $\mu \pm \sigma$. Diese kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsdichte $\mathcal{N}(x)$ erhält man nur bei (theoretisch) unendlich vielen Einzelmessungen. Im Praktikum stehen meist nur wenige Einzelmessungen zur Verfügung. Wir können daher nur beste Schätzwerte für den Mittelwert und die Standardabweichung angeben:

$$\mu \approx \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{4}$$

$$\sigma \approx s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}. \tag{5}$$

$\bar{x}$ ist der bekannte arithmetische Mittelwert, und s wird als empirische Standardabweichung *der Einzelmessung* bezeichnet: $x_i \pm s$.

Standardabweichung des Mittelwertes

Da der Mittelwert zuverlässiger als jede Einzelmessung ist, wird die Unsicherheit des Mittelwertes kleiner als die Unsicherheit jeder Einzelmessung sein. Die Unsicherheit des Mittelwertes berechnet sich dabei gemäß:

$$u(\bar{x}) = s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}. \tag{6}$$

Das Ergebnis einer Messreihe lautet dann: $\bar{x} \pm u(\bar{x}) = \bar{x} \pm s/\sqrt{n}$. Für genügend große n (typisch $n \geq 10$) werden bei einer gaußverteilten Messgröße im Mittel 68% der so ermittelten Intervalle den "wahren Wert" μ der Grundgesamtheit enthalten. $u(\bar{x}) = s/\sqrt{n}$ ist dann die „Standardabweichung des Mittelwertes" und $\bar{x} \pm s/\sqrt{n}$ wird auch als 68%-Überdeckungsintervall bezeichnet. Vorsicht ist geboten wenn nur wenige Einzelmessungen ($n \leq 10$) in die Mittelwertbildung eingehen. Dann ist ein Korrekturfaktor zu berücksichtigen (s. Kapitel zur Student t-Verteilung im Skript) und für $n \geq 4$ gilt:

$$u(\bar{x}) = s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{n-1}{n-3}}\frac{s}{\sqrt{n}} \tag{7}$$

Sonderfall: Messung von Zählereignissen

Zum Beispiel in kernphysikalischen Experimenten ermittelt man in der Regel eine Zahl N statistischer Ereignisse in einem festen Zeitraum Δt. Wiederholt man die Messung, so zeigt sich, dass N näherungsweise *Poisson*-verteilt ist mit einer Standardabweichung von $s_N = \sqrt{N}$. Die Messunsicherheit $u(N) = \sqrt{N}$ lässt sich deshalb bereits aus einer einzelnen Messung abschätzen. Sie hängt von der Zahl der Ereignisse und damit (indirekt) von der Messzeit ab. Zur Verkleinerung der relativen Unsicherheit $u(N)/N = 1/\sqrt{(N)}$ müssen daher einfach nur mehr Ereignisse gezählt werden.

2.2 Typ B Messunsicherheit

Sehr häufig müssen Unsicherheiten allerdings anders als durch wiederholte Messung abgeschätzt werden. Da in einem solchen Fall keine Verteilung gemessener Werte vorliegt, wird der Messgröße eine sinnvolle Verteilung *zugeordnet*, die unsere unvollständige Information über die Messgröße widerspiegelt. Ein gutes Beispiel sind Grenzabweichungen von Messgeräten, die man oft bei den Herstellerangaben findet, z.B. bei einem Digitalmultimeter findet sich: $L = 0,5\%\text{Mw.} + 5\text{Dgt.}$ (bedeutet: 0,5% des Messwertes plus 5 mal die kleinste signifikante Stelle auf der Digitalanzeige). Solch eine Angabe besagt, dass der gemessene Wert maximal um die Grenzabweichung $\pm L$ vom wahren Wert der Messgröße abweicht. Messgeräte mit größeren Abweichungen wurden vom Hersteller aussortiert. Da uns keine weitere Information vorliegt, ordnen wir dem gemessenen Wert $\widehat{x}$ eine Gleichverteilung (Rechteckverteilung) über dem Intervall $[\widehat{x} - L : \widehat{x} + L]$ zu. Die Standardabweichung dieser Rechteckverteilung ist dann die Unsicherheit $u(\widehat{x}) = 2L/\sqrt{12}$, die aufgrund der Grenzabweichung des Messgerätes zu berücksichtigen ist.

Auf diese Art werden unterschiedliche Informationen durch verschiedene Wahrscheinlichkeitsdichten (PDF: *probability density function* für kontinuierliche Messgrößen) bzw. Wahrscheinlichkeitsverteilungen (für diskrete Messgröße) repräsentiert. So werden Grenzabweichungen von Geräten oder auch Rundung beim analogen Ablesen von Skalenteilen mit einer Rechteckverteilung repräsentiert. Interpolation zwischen Skalenteilen z.B. mit einer Dreiecksverteilung. Tabelle 1 zeigt gängige Verteilungen und deren zugehörige Mittelwerte und Standardabweichungen, die im Zusammenhang mit Typ A und Typ B Unsicherheiten im Praktikum Anwendung finden. Tabelle 2 zeigt relevante Unsicherheitsbeiträge einiger gängiger Messverfahren im Praktikum. Schlussendlich werden alle Unsicherheitsbeiträge gemäß Glg. (1) kombiniert und die Gesamtunsicherheit dem besten Schätzwert für die Messgröße gemäß Glg. (2) zugeordnet.

2.3 Gaußsche Fortpflanzung von Messunsicherheiten

Häufig ist jedoch nicht der beste Schätzwert $\widehat{x}$ einer direkt zugänglichen Messung der Größe X das Ziel der Untersuchung, sondern die Berechnung einer aus $\widehat{x}$ abgeleiteten Größe $\widehat{g} := g(\widehat{x})$. Zur Abschätzung der Unsicherheit $u(\widehat{g})$ berechnet man die Steigung der Funktion $g(x)$ an der Stelle $\widehat{x}$ und linearisiert das Kurvenstück um $\widehat{g}$. Man erhält

$$u(g) = \left.\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\right|_{\widehat{x}} \cdot u(\widehat{x}). \tag{8}$$

Diese Näherung ist nur sinnvoll, wenn $g(x)$ differenzierbar ist, und wenn $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$ sich im Gebiet $\widehat{x} \pm u(\widehat{x})$ kaum ändert.

Hängt die interessierende Messgröße g nun von verschiedenen Eingangsgrößen $x, y, z \ldots$ ab, die alle als beste Schätzwerte mit Unsicherheiten vorliegen: $\widehat{x} \pm U(\widehat{x}), \widehat{y} \pm u(\widehat{y}), \ldots$, dann erhält man den besten Schätzwert als $\widehat{g} = g(\widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z} \ldots)$. Wenn man die Unsicherheiten $u(\widehat{x}), u(\widehat{y}), u(\widehat{z}) \ldots$ als voneinander unabhängig voraussetzen darf, dann gilt das Gauß'sche Gesetz für die Fortpflanzung von Unsicherheiten und man erhält die Unsicherheit der Größe $\widehat{g}$ als

$$u(\widehat{g}) = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{\widehat{x}} \cdot u(\widehat{x})\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{\widehat{y}} \cdot u(\widehat{y})\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial g}{\partial z}\right|_{\widehat{z}} \cdot u(\widehat{z})\right)^2 + \ldots} \tag{9}$$

mit $\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{\widehat{x}}$ als partielle Ableitung der Funktion g nach x ausgewertet an der Stelle $\widehat{x}$.

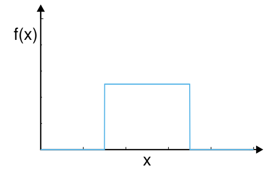
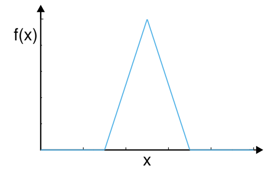
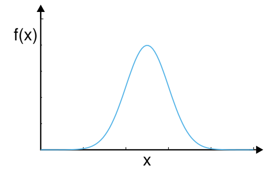
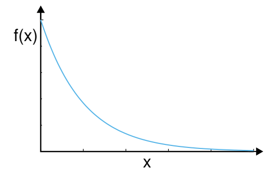
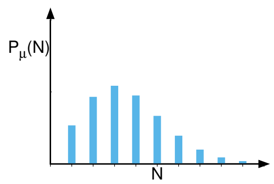
vorliegende Information über die Messgröße X	zugeordnete Verteilung		Erwartungswert Standardabweichung
obere und untere Grenze $a \le x \le b$	Gleichverteilung: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für} \quad a \le x \le b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$		$\mu = \frac{a+b}{2}$ $\sigma = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$
obere und untere Grenze $a \le x \le b$ Randwerte sehr unwahrscheinlich	Dreiecksverteilung: $f(x) = \begin{cases} \frac{4(x-a)}{(b-a)^2} & \text{für} \quad a \le x \le \frac{a+b}{2} \\ \frac{4(b-x)}{(b-a)^2} & \text{für} \quad \frac{a+b}{2} \le x \le b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$		$\mu = \frac{a+b}{2}$ $\sigma = \frac{b-a}{2\sqrt{6}}$
bester Schätzwert x_0, Standardunsicherheit $u_s(x)$	Normalverteilung: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$		$\mu = x_0$ $\sigma = u_s(x)$
bester Schätzwert x_0, $x \ge 0$	Exponentialverteilung: $f(x) = \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu}$		$\mu = x_0$ $\sigma = \mu = x_0$
diskrete Zählereignisse, Einzelmessung N_0	Poissonverteilung: $P_\mu(N) = \frac{\mu^N}{N!} e^{-\mu}$		$\mu = N_0$ $\sigma = \sqrt{\mu} = \sqrt{N_0}$

Tabelle 1: Die eindeutige Zuordnung einer Wahrscheinlichkeitsdichte bzw. Wahrscheinlichkeitsverteilung für einige Beispiele von vorliegender Information über eine kontinuierliche Messgröße X bzw. diskrete Größe N.

Messgröße	Messgerät	Art der Unsicherheit	Obergrenze zufälliger Abweichungen	PDF	Unsicherheitsbeitrag
Länge	Gliedermaßstab Kl. III Holz	Grenzabweichung	$L = 0{,}5\,\mathrm{mm}$	RV	$u_{\mathrm{gr}} = \frac{L}{\sqrt{3}}$
	Gliedermaßstab Metall	Grenzabweichung	$L = 0{,}1\,\mathrm{mm}$	RV	$u_{\mathrm{gr}} = \frac{L}{\sqrt{3}}$
	Messschieber	Grenzabweichung	$L = 0{,}05\,\mathrm{mm}$	RV	$u_{\mathrm{gr}} = \frac{L}{\sqrt{3}}$
		Ableseunsicherheit Rundung auf volle Skt.	$a = 1/2\,\mathrm{Skt.}$	RV	$u_{\mathrm{abl}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$
		Ableseunsicherheit Interpol. zwischen Skt.	$a = 1/2\,\mathrm{Skt.}$	DV	$u_{\mathrm{abl}} = \frac{a}{\sqrt{6}}$
Zeit	Handstoppuhr digital	Gang- und Ableseunsicherheit	$L = 0{,}001\% \cdot t_{\mathrm{abl}} + 1\,\mathrm{Dgt.}$	RV	$u_L = \frac{L}{\sqrt{3}}$
		Auslöseunsicherheit	$a = 0{,}3\,\mathrm{s}$	RV	$u_L = \frac{a}{\sqrt{3}}$
Masse	Präzisions- oder Feinwaage	Eichwert	$e = 1 - 10 \cdot \mathrm{Dgt.}$ Mindestlast beachten!	RV	$u_{\mathrm{ew}} = \frac{e}{\sqrt{3}}$
Temperatur	Laborthermometer z.B. Messbereich $0 \ldots 100\,°\mathrm{C}$ $0{,}2\,°\mathrm{C}$ Skalenteilung	Grenzabweichung	$L = 0{,}3\,°\mathrm{C}$	RV	$u_{\mathrm{gr}} = \frac{L}{\sqrt{3}}$
		Ableseunsicherheit Rundung auf volle Skt.	$a = 1/2\,\mathrm{Skt.}$	RV	$u_{\mathrm{abl}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$
		Ableseunsicherheit Interpol. zwischen Skt.	$a = 1/2\,\mathrm{Skt.}$	DV	$u_{\mathrm{abl}} = \frac{a}{\sqrt{6}}$
	Digitalthermometer Typ-K Thermoelement Kl. 1 Messbereich $-40 \ldots 1000\,°\mathrm{C}$	Grenzabweichung	$L = \max(1{,}5\,°\mathrm{C}; 0{,}004 \cdot \lvert T_{\mathrm{abl}} \rvert)$	RV	$u_{\mathrm{gr}} = \frac{L}{\sqrt{3}}$
	Digitalthermometer Platin Messwiderstand Kl. A Messbereich $-100 \ldots 450\,°\mathrm{C}$	Grenzabweichung	$L = 0{,}15\,°\mathrm{C} + 0{,}002 \cdot \lvert T_{\mathrm{abl}} \rvert$	RV	$u_{\mathrm{gr}} = \frac{L}{\sqrt{3}}$
Strom / Spannung	Analogmultimeter Güteklasse g, Messbereich Mb	Grenzabweichung	$L = g\% \cdot \mathrm{Mb}$	RV	$u_{\mathrm{gr}} = \frac{L}{\sqrt{3}}$
		Ableseunsicherheit Rundung auf volle Skt.	$a = 1/2\,\mathrm{Skt.}$	RV	$u_{\mathrm{abl}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$
		Ableseunsicherheit Interpol. zwischen Skt.	$a = 1/2\,\mathrm{Skt.}$	DV	$u_{\mathrm{abl}} = \frac{a}{\sqrt{6}}$
	Digitalmultimeter je nach Messbereich Messwert Mw	Grenzabweichung	$L = 0{,}5\,\% \cdot \mathrm{Mw} + 3 \cdot \mathrm{Dgt.}$	RV	$u_{\mathrm{gr}} = \frac{L}{\sqrt{3}}$

Tabelle 2: Typische im Praktikum verwendete Messgeräte und Abschätzungen von Typ B Unsicherheiten. Die jeweils verwendete Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (PDF) ist angegeben. RV: Rechteckverteilung, DV: Dreiecksverteilung. T_{abl} und t_{abl} beziehen sich auf die abgelesenen Werte. Beachten Sie: dies sind nur Beispiele! Nutzen Sie auf jeden Fall die Angaben des Herstellers zu den einzelnen Geräten bzw. die Angaben an Ihrem Messplatz! Informationen zu weiteren Messgeräten sind in [3] zu finden.

2.4 Angabe des vollständigen Messergebnisses mit Unsicherheit

Das Endergebnis einer Datenanalyse besteht meist in der Angabe eines vollständigen Messergebnisses mit Unsicherheit. Die Zahlenwerte sind dabei sinnvoll auf- oder abzurunden. Auf wie viele signifikante Stellen genau das Messergebnis angegeben wird, hängt dabei von der Unsicherheit ab. Es gelten folgende Regeln:

- Die abschließende Angabe einer Unsicherheit hat mit höchstens zwei signifikanten Stellen zu erfolgen. Ist bei dem Zahlenwert der Unsicherheit die erste von Null verschiedene Ziffer von links eine 1 oder eine 2, dann soll die Angabe zwei signifikante Stellen enthalten, da sonst die Gefahr zu großer Rundungsabweichungen (bis zu 90%!) besteht.
- Das Messergebnis wird auf die selbe Stelle gerundet, wie die Unsicherheit.
- Beim Runden des Messergebnisses gilt: Ist die auf die Rundungsstelle folgende Ziffer ≤ 4 wird abgerundet, ist die Folgeziffer ≥ 5 wird aufgerundet.
- Beim Runden von Unsicherheiten gilt: Abgerundet wird nur, wenn sich der Unsicherheitsbetrag durch das Abrunden um höchstens 5% reduziert. Ansonsten wird *immer aufgerundet*!
- Mehrfachrundungen sind zu vermeiden. Werden gerundete Zwischenergebnisse angegeben, ist trotzdem mit der vollen Anzahl an Stellen weiter zu rechnen.

Beispiel: Bestimmung der Fallbeschleunigung $g \pm u(g)$. Rundung des vollständigen Messergebnisses für verschiedene Werte der Messunsicherheit:

Primärdaten:	g $u(g)$	9,814 73 m/s^2 0,063 42 m/s^2	9,814 73 m/s^2 0,083 42 m/s^2	9,814 73 m/s^2 0,015 34 m/s^2
Rundungsstelle:		0,01	0,01	0,001
gerundet: **Ergebnis:**	$u(g)$	0,07 m/s^2 (9,81 ± 0,07) m/s^2	0,08 m/s^2 (9,81 ± 0,08) m/s^2	0,015 m/s^2 (9,815 ± 0,015) m/s^2

3 Graphische Datenauswertung

Häufig werden im Praktikum Messdaten auf Millimeter- oder Logarithmenpapier aufgetragen. Oft werden dabei lineare Zusammenhänge erwartet deren Steigung Auskunft über interessierende physikalische Größen gibt. Mit einfachen Mitteln lassen sich dabei Abschätzungen für Steigungen und deren Unsicherheiten zumindest näherungsweise bestimmen.

3.1 Ausgleichsgrade mit Unsicherheiten

Im einfachsten Fall wird ein linearer Zusammenhang einer physikalischen Größe g und einer Eingangsgröße X erwartet. Mittels einer Auftragung $g(x)$ über x soll die Steigung der Funktion $g(x)$ mit der zugehörigen Unsicherheit bestimmt werden. Zunächst wird dafür nach Auftragung der Daten mit Unsicherheitsbalken ein Ausgleichsgrade durch die Daten gelegt. Formal lässt sich das Problem mittels *linearer Regression* behandeln. Dabei betrachtet man die Summe der Abstands-Quadrate aller Datenpunkte von der Ausgleichsgraden, meist noch gewichtet mit den Unsicherheiten, und minimiert diese. Näherungsweise lässt sich dies auch auf Millimeterpapier und per Augenmaß durchführen. Wird dabei ein linearer Zusammenhang mit

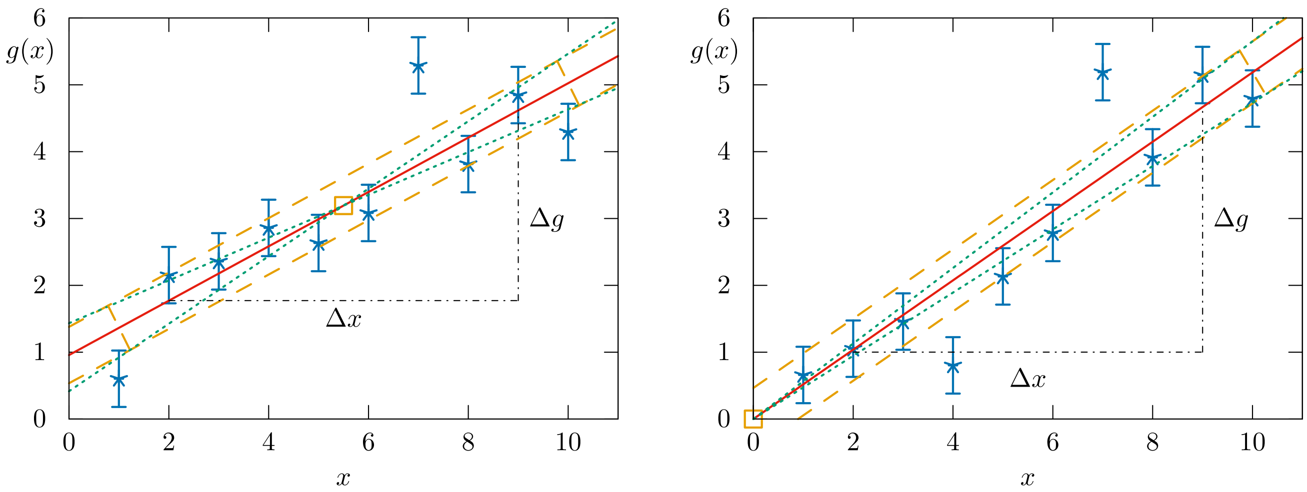


Abbildung 1: Graphische Abschätzung von Ausgleichsgraden (rote durchgezogene Linie); Bestimmung von deren Steigung (ggf. auch Achsabschnitt) mit Unsicherheiten. Links für den Fall eines erwarteten linearen Zusammenhangs mit Achsabschnitt, rechts für den Fall einer erwarteten Ursprungsgeraden. Alle Geraden der Abschätzung laufen durch einen gemeinsamen Punkt (gelbes Quadrat): den Schwerpunkt der Daten (links) bzw. den Ursprung (rechts).

Achsabschnitt erwartet, dann geht die Ausgleichsgrade stets durch den Schwerpunkt (x_s, g_s) der n Datenpunkte (mit $x_s = \sum_i x_i/n$ bzw. $g_s = \sum_i g(x_i)/n$). Erwartet man einen proportionalen Zusammenhang, dann ist die Gerade druch den Koordinatenursprung fixiert. Beide Fälle sind in Abb. 1 demonstriert, der Fixpunkt ist jeweils als Quadrat eingezeichnet. Die durchgezgene Linie ist die jeweilige Ausgleichsgrade. Die Steigung $m = \Delta g/\Delta x$ wird über ein Steigungsdreieck bestimmt.

Um die Unsicherheit der Steigung $u(m)$ graphisch zu bestimmen, empfiehlt sich folgendes Vorgehen:

- Zunächst werden zwei Hilfslinien im gleichen Abstand ober- und unterhalb parallel zur Ausgleichsgraden eingezeichnet. Der Abstand wird so gewählt, das ca. $2/3$ aller Messwerte zwischen den Hilfslinien zu liegen kommen, ca. $1/3$ außerhalb. Alternativ können auch die Unsicherheitsbalken der Daten zur Abschätzung des Abstands der Hilfslinen herangezogen werden. Wenn die Unsicherheiten $u(g)$ nicht alle gleich sind, kann dies ggf. in den Hilfslinien berücksichtigt werden, dann sind diese nicht mehr parallel aber immer noch symmetrisch zur Ausgleichsgraden.
- Dann werden die Hilfslinien am ersten und letzten Messpunkt senkrecht zur Ausgleichsgraden abgeschlossen. Bei parallelen Hilfslinien ergibt sich so ein Rechteck (vgl. gelb gestrichelte Linien in Abb. 1), andernfalls ein Trapez.
- Die Diagonalen im Rechteck (Trapez) ergeben eine Abschätzung für die Obergrenze zufälliger Abweichungen von Steigung (Steigungsdreieck) und Achsabschnitt. Im Fall der Ursprungsgrade sind es die Verbindungen vom Koordinatenursprung zu den gegenüberliegenden Ecken des Rechtecks (Trapezes), vgl. die grün gepunkteten Linen in Abb. 1.
- Aus den Werten für maximal/minimale Steigung bzw. Achsabschnitt lässt sich unter Annahme einer Rechteckverteilung gemäß GUM die Unsicherheit berechnen, z.B. für die Steigung m: $u(m) = \frac{m_{\max} - m_{\min}}{\sqrt{12}}$.

3.2 Benutzung von Logarithmenpapier bzw. logarithmischen Auftragungen

Logarithmenpapier dient dazu, Exponentialfunktionen $y = a \cdot \mathrm{e}^{bx}$ und Potenzfunktionen $y = a \cdot x^b$ geradlinig darzustellen. Dies ist hilfreich, wenn für gemessene Wertepaare ein Zusammenhang von der Form der Exponential- oder der Potenzfunktion vermutet wird. Statt eine Ausgleichs*kurve* durch die auf Millimeterpapier eingetragenen Versuchswerte zu legen, muss man bei passender logarithmischer Auftragung nur die Parameter einer Ausgleichs*geraden* ermitteln. Weiterhin stellt man auch andere Funktionen auf Logarithmenpapier dar, wenn sich eine Größe über mehrere Zehnerpotenzen erstreckt, oder wenn man nicht gleiche Unterschiede, sondern *gleiche Verhältnisse* durch *gleiche Abstände* dargestellt haben möchte.

Einfach-logarithmisches Papier

Merke: Auf einfach-logarithmischem Papier wird das Bild der **Exponential**funktion geradlinig, sofern man Ordinaten logarithmisch einteilt und Abszissen linear. Sind umgekehrt Ordinaten linear geteilt und Abszissen logarithmisch, dann wird das Bild der **Logarithmus**funktion geradlinig.

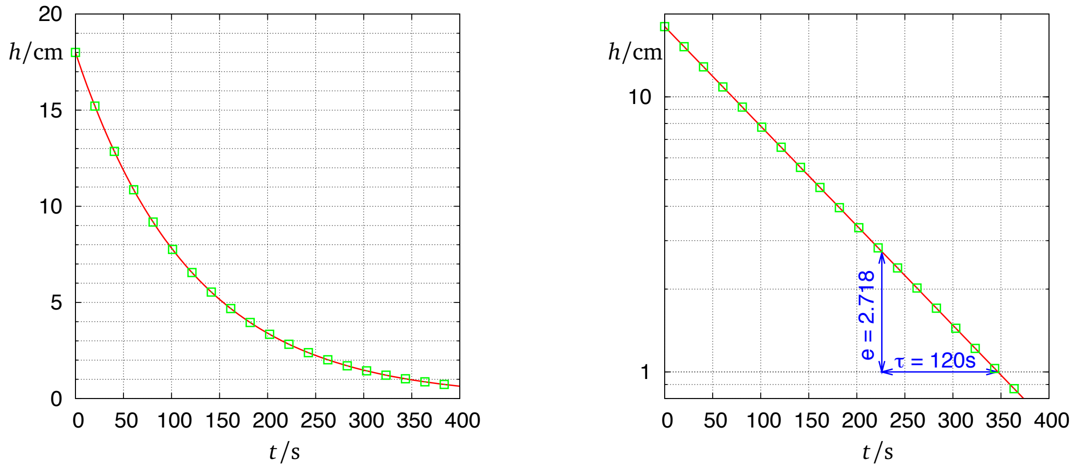


Abbildung 2: Zur Verdeutlichung einer einfach-logarithmischen Auftragung: Ein exponentieller Zerfall wird als Gerade abgebildet.
Links: lineare Achseneinteilung, rechts: einfach-logarithmische Achseneinteilung.

Als Beispiel betrachten wir einen exponentiellen Zerfall. Als Funktion der Zeit t sei beispielsweise die Höhe h von Bierschaum gemessen worden und es wird ein Zusammenhang erwartet gemäß:

$$h(t) = h_0 \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau} \tag{10}$$

mit einer Anfangshöhe h_0 und einer Zeitkonstante τ.

Nachdem Glg. (10) in logarithmierter Form $\log(h(t)/h_0) = -t/\tau \log(\mathrm{e})$ eine Gerade ergibt, lässt sich aus dem Steigungsdreieck wie in Abb. 2 gezeigt, direkt die Zeitkonstante ablesen: Wählt man zwei Werte von h so, dass ihr Verhältnis gerade der Eulerschen Zahl entspricht, also $h_1/h_2 = \mathrm{e} \approx 2{,}718$, dann ergibt die Differenz der zugehörigen Zeitwerte gerade die gesuchte Zeitkonstante $t_2 - t_1 = \tau = 120\,\mathrm{s}$.

Doppelt-logarithmisches Papier

Merke: Auf doppelt-logarithmischem Papier wird das Bild einer **Potenz**funktion geradlinig.

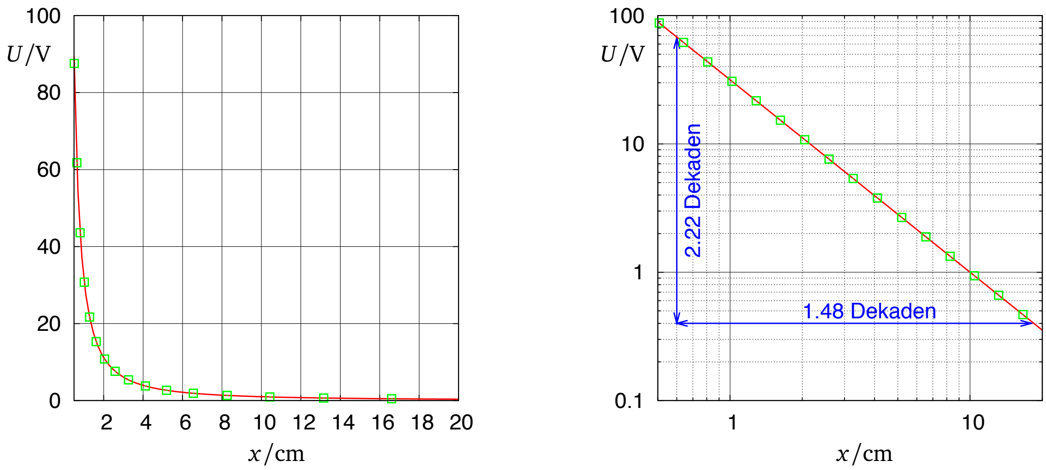


Abbildung 3: Zur Verdeutlichung einer doppelt-logarithmischen Auftragung: Eine Potenzfunktion wird als Gerade abgebildet.
Links: lineare Achseneinteilung, rechts: doppelt-logarithmische Achseneinteilung.

Als Beispiel gelte für eine gemessene elektrische Spannung U in Volt als Funktion eines Abstandes x in cm ein Potenzgesetz:

$$U = U_0 \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-b}. \tag{11}$$

Nun lassen sich alle Konstanten einfach aus der doppelt-logarithmischen Auftragung ablesen: Wählt man z. B. die Spannung U in Einheitsgrößen, also $U_0 = 1\,\mathrm{V}$, so liest man $x_0 = 10\,\mathrm{cm}$ ab. Aus der Steigung der Geraden ergibt sich die Potenz b, denn logarithmiert führt Glg. (11) zu $\log(U/U_0) = -b \cdot \log(x/x_0)$. Aus dem Steigungsdreieck in Abb. 3 liest man ab:

$$-b = \frac{\log(U_2) - \log(U_1)}{\log(x_2) - \log(x_1)} = \frac{2.22}{1.48} = \frac{3}{2} = 1.5.$$

Man beachte beim Steigungsdreieck, dass unterschiedliche Längen für eine Dekade auf beiden Achsen zu berücksichtigen sind.