

Statistik des radioaktiven Zerfalls und Signifikanzprüfung bei zählenden Messungen

Dr. Jonny Birkhan

1 Hinweise zur Vorbereitung des Versuchs

1. Der Versuch gliedert sich in **zwei Teile**.
 - a) Im ersten Teil werden Sie den radioaktiven Zerfall mit Hilfe von Monte-Carlo-Rechnungen simulieren, um die Zerfallsdaten anschließend statistisch auszuwerten.
 - b) Im zweiten Teil geht es um die Bestimmung der Erkennungs- und Nachweisgrenze für eine impulszählende Messung der ionisierenden γ -Strahlung eines ^{137}Cs -Präparats mit einem Halbleiterdetektor. Auch hierbei werden Sie Monte-Carlo-Rechnungen benutzen, um die beiden charakteristischen Grenzen zu bestimmen.
2. **Die Versuchsanleitung liegt an den Messplätzen aus, Sie brauchen sie nicht auszudrucken!**
3. Lassen Sie sich von den im Text verwendeten Gleichungen nicht abschrecken. Sie benötigen keine Kenntnisse über deren Herleitungen. Einige der Gleichungen sollen im Weiteren lediglich benutzt werden.
Was Sie zum Verständnis des Versuchs benötigen, wird in diesem Vorbereitungsdokument erklärt.
4. **Die Blockveranstaltung *Einführung in die Konzepte und Methoden der Metrologie* hat auf diesen Versuch vorbereitet. Sie finden daher insbesondere auf den Vortragsfolien der Tage 4 und 5 nützliche Hinweise zur Programmierung des radioaktiven Zerfalls und zur Bestimmung von Erkennungs- und Nachweisgrenzen.**
5. Dieses Dokument erklärt die wesentlichen Teile des Versuchs weitreichend genug, um nur vereinzelt auf zusätzliche Literatur zurückgreifen zu müssen. **Nehmen Sie sich daher Zeit zum Studieren dieser Versuchsvorbereitung.**
6. Falls nötig, studieren Sie die in Abschnitt 4 angegebene Literatur am besten so, dass Sie die geforderten Begriffe zunächst nachschlagen und von diesen Textstellen ausgehend Ihr Wissen vertiefen, soweit das nötig ist, um die gestellten Fragen beantworten zu können.
7. **Der Umfang dieses Dokuments, in Seiten gemessen, ist deshalb größer, weil viele Abbildungen enthalten sind.**
8. Sie werden im Versuch an Rechnern arbeiten, auf denen Ubuntu als Betriebssystem installiert ist. Außerdem werden Sie in geringem Umfang C-Quelltext editieren müssen. Daher werden sogenannte Cheat-Sheets (Spickzettel) auf der Praktikumswebsite empfohlen, auf denen Systembefehle für die Navigation im Dateisystem als auch die Syntax für die Programmiersprache C abgedruckt sind. Diese Dokumente dienen der Vertiefung und sind nicht zwingend für die Hausaufgabe erforderlich.

2 Lernziele

1. Modellierung und Simulation von physikalischen Prozessen durch Zufallsexperimente am Beispiel des radioaktiven Zerfalls

Die Modellierung von Prozessen mit Hilfe von simulierten Zufallsexperimenten ist in der Physik zu einem etablierten Verfahren herangewachsen, um dynamische Systeme zu untersuchen oder Experimente zu planen. Dabei gehört die Modellierung von realen Prozessen durch die Simulation von Zufallsexperimenten in den Bereich der sogenannten Monte-Carlo-Methoden. In der Physik ist ein solches System zum Beispiel ein Kollektiv von instabilen Atomkernen. Der radioaktive Zerfall von Atomkernen ist ein statistischer Prozess, bei dem nicht vorhergesagt werden kann, wie viele Atomkerne eines Kollektivs pro Zeiteinheit zerfallen werden. Lediglich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine bestimmte vorgegebene Anzahl pro Zeiteinheit zerfällt, lässt sich angeben. Die Anzahl an zerfallenen Kernen pro Zeiteinheit zeigt daher bei wiederholten Messungen ein bestimmtes statistisches Verhalten.

Der Zerfall von Atomkernen lässt sich durch ein Bernoulli-Experiment modellieren und simulieren. Im Grenzfall einer großen Anzahl an Atomkernen mit kleiner Zerfallswahrscheinlichkeit folgt die Anzahl an zerfallenen Kernen pro Zeiteinheit einer Poisson-Verteilung. In diesem Versuch geht es darum, den radioaktiven Zerfall als statistischen Prozess im Rahmen eines Bernoulli-Experimentes zu modellieren und zu simulieren sowie daraus die typischen Eigenschaften, wie die näherungsweise Poisson-Verteilung der Zerfallsraten bei wiederholten Messungen und das exponentielle Abklingen der Aktivität, zu demonstrieren.

Sie sollen sich durch den Versuch darüber klar werden, wann die Poisson-Verteilung eine hinreichende Näherung für die Verteilung der Anzahl an zerfallenden Atomkernen pro Zeiteinheit ist, wenn Sie diese Anzahl mit einem Messgerät wiederholt hintereinander messen würden.

2. Signifikanzprüfung eines Messsignals bei Vorhandensein eines Störsignals am Beispiel der Zerfallsrate beim radioaktiven Zerfall

Dem Nachweis eines Messsignals vor einem unvermeidbar auftretenden Störsignal kommt in den Natur- und Ingenieurwissenschaften eine fundamentale Bedeutung zu. Wann kann sich ein Experimentator sicher sein, dass er den erwarteten Effekt in seinem Versuch beobachtet hat oder nicht? Bezogen auf den Nachweis ionisierender Strahlung bedeutet dies die Frage danach, wann zum Beispiel radioaktive Zerfallsereignisse einer Strahlungsquelle vor dem natürlichen Strahlungshintergrund erkannt worden sind. Dies ist eine typische Aufgabenstellung im Strahlenschutz, bei der es darum geht, ob es zum Beispiel eine Kontamination durch eine radioaktive Quelle gibt oder nicht. Ein wichtiges Beispiel aus der Kernphysik ist der Nachweis des Zerfalls eines bestimmten Anregungszustands eines Atomkerns durch eine entsprechende Linie im gemessenen Energiespektrum.

Um entscheiden zu können, ob sich ein Messsignal signifikant von Störsignalen abhebt, werden die beiden charakteristischen Größen Erkennungs- und Nachweisgrenze für den gegebenen Fall berechnet. Dies wird im Grundpraktikumsversuch am Beispiel des Nachweises von Zerfallsereignissen einer Strahlungsquelle vor einem (simulierten) natürlichen Strahlungshintergrund geübt. Dabei werden die Zerfallsereignisse mit einem Halbleiterdetektor gemessen.

Sie sollen sich durch den Versuch darüber klar werden, dass die Erkennungs- und Nachweisgrenze die Grundlage für die Entscheidung dafür bilden, ob ein erwarteter physikalischer Effekt signifikant vor einem störenden Hintergrund hervortritt und ob das Messverfahren für den Messzweck geeignet ist. Die Bedeutung und die Idee der Berechnung dieser beiden charakteristischen Grenzen stehen im Vordergrund. Der mathematische Formalismus, der hinter der Berechnung der beiden Grenzen steht, wird nicht abgefragt.

3 Fragenkatalog

Sie sollten mindestens auf folgende Fragen antworten können:

1. Wie lauten die Strahlenschutzgrundsätze?
2. Durch welche Prozesse wechselwirkt Gamma-Strahlung mit Materie?
3. Wie wird Gamma-Strahlung mit gasgefüllten Detektoren und Festkörperdetektoren gemessen?
4. Wie funktioniert die Umsetzung eines analogen Signals in ein digitales allgemein und im Speziellen bei zählenden Messungen?
5. Was ist eine Messkette?
6. Wie stelle ich sicher, dass mein Messaufbau sinnvolle Messwerte liefert?
7. Was bedeuten die Begriffe: Zufallsexperiment, Bernoulli-Experiment, Histogramm, Wahrscheinlichkeit, Wahrscheinlichkeitsverteilung, Wahrscheinlichkeitsdichte, Erwartungswert, Varianz, Arithmetischer Mittelwert, Standardabweichung, Quantil?
8. In welchem Verhältnis stehen Bernoulli-, Poisson- und Normalverteilung?
9. Was ist der GUM, was ist darin festgelegt?
10. Was bedeuten die Begriffe: Messgröße, Messergebnis, Messunsicherheit, bester Schätzwert, Erkennungs- und Nachweisgrenze?
11. Wie erzeugt man Zufallszahlen, welche Eigenschaften müssen diese haben?
12. Was sind Monte-Carlo-Methoden?
13. Was bedeuten die Begriffe: Zerfallswahrscheinlichkeit, Zerfallsrate, Aktivität, Brutto/Netto?
14. Wie lautet das Gesetz für den radioaktiven Zerfall, was bedeutet es?
15. Was sind die Zerfallsarten der Isotope ^{137}Cs und ^{137}Ba ?

4 Literatur zur Vorbereitung

Grundsätzlich sollten Sie das Skript zum Grundpraktikum gelesen haben. Die nachfolgenden Literaturempfehlungen der Tabelle 1 sind nach den Fragen aus dem Vorbereitungsblock gruppiert.

Tabelle 1: Literatur zur Vorbereitung

Fragen	Literaturauswahl
1.-3., 13.-14.	H. Krieger: <i>Grundlagen der Strahlungsphysik und des Strahlenschutzes</i> , Springer Spektrum, 2012. (erhältlich als e-book über ULB)
4.-6.	R. Parthier: <i>Messtechnik, Studium Technik</i> , Vieweg, 2008. (erhältlich als e-book über ULB)
7.-8.	H.-J. Mittag: <i>Statistik - Eine Einführung mit interaktiven Elementen</i> , Springer Spektrum, 2010. (erhältlich als e-book über ULB)
9.-10.	Der GUM ist als Dokument JCGM 100:2008 kostenlos erhältlich unter: GUM Speziell für besten Schätzwert, Erkennungs- und Nachweisgrenze: EKG , NWG und Messunsicherheiten
11.-12.	Das GUM Supplement 1 ist als Dokument JCGM 101:2008 kostenlos erhältlich unter: GUM Supplement 1 H. Nahrstedt: <i>Die Monte-Carlo-Methode - Beispiele unter Excel VBA</i> , Springer Vieweg, 2015. (erhältlich als e-book über ULB)
15.	NuDat 2.7, Datenbank Kerndaten

5 Versuchsaufbau

Für den Versuch wird eine radioaktive Quelle mit dem Radionuklid ^{137}Cs verwendet, dessen Tochter $^{137\text{m}}\text{Ba}$ γ -Quanten mit einer Energie von 662 keV emittiert, die aber üblicherweise dem ^{137}Cs zugeordnet werden. Die γ -Quanten werden mit einem Silizium-Halbleiter-Detektor der Firma Teviso detektiert, siehe Abbildung 1 links. Der Detektor liefert für jedes detektierte Quant ein Rechtecksignal, das von einem Micro-Controller registriert und dadurch ein Zähler jeweils um eins hochgezählt wird. Der Micro-Controller (μC) ist mit einer der USB-Schnittstellen des Arbeitsplatzrechners verbunden. Über diese USB-Schnittstelle sendet der μC die Messdaten im Sekundentakt an den Rechner. Die Messkette besteht also aus:

- Detektor (Silizium-Halbleiter + Vorverstärker + Signalformwandler),
- Micro-Controller (Zähler),
- Arbeitsplatzrechner.

Üblicherweise ist die Nachweiswahrscheinlichkeit von dünnen Silizium-Halbleiter-Plättchen, wie sie im Detektor verbaut sind, deutlich kleiner als von Geiger-Müller-Zählrohren. Daher muss der Strahlungshintergrund für die Messungen im Versuch durch eine radioaktive Quelle simuliert werden, um in angemessener Zeit den Versuch beenden zu können. Die radioaktive Quelle und der Detektor werden für die verschiedenen Versuchsdurchläufe sich gegenüberstehend in eine Kunststoffhalterung gesetzt. Über unterschiedliche Abstände zwischen Quelle und Detektor werden verschiedene Zählraten eingestellt, siehe Abbildung 1 rechts.

Detektor, Quellenhalterung und radioaktive Quelle befinden sich während den Messungen in einer Bleiburg.



Abbildung 1: Links: Der Detektor ist in dem schwarzen Block enthalten, der sich auf der weißen Kunststoffbox befindet. Die sensitive Fläche ist der gräuliche, rechteckige Bereich auf dem schwarzen Block. Rechts: Der Detektor befindet sich in einer Quellenhalterung und kann entlang der Rille frei bewegt werden, um so die Zählraten einzustellen (im Bild noch ohne radioaktive Quelle).

6 Teil I - Modellierung und Simulation von physikalischen Prozessen durch Zufallsexperimente am Beispiel des radioaktiven Zerfalls

Die Modellierung und Simulation von realen Prozessen mit Hilfe von Monte-Carlo-Rechnungen (MC) ist ein etabliertes und modernes Mittel zur Untersuchung dynamischer Systeme. Die Simulation realer Prozesse durch MC-Rechnungen hat insbesondere Einzug gehalten in die

- Soziologie u. Psychologie, z.B. Verhaltensforschung,
- Biologie, z.B. Populationsdynamik,
- Ökonomie/Finanzwirtschaft, z.B. Börsenkurse, Wertermittlung,
- Meteorologie, z.B. Wettervorhersage,
- Physik u. Technik
 - z.B. Teilchentransport durch Materie (Experimentplanung, Detektorbau),
 - Fluidodynamik,
 - Quantum-Monte-Carlo-Methoden zur Lösung von Viel-Teilchen-Problemen,
 - Niveaudichteanalyse angeregter Kerne,
 - Abstandsverteilungen in der Chaosforschung,
 - Statistische Physik,
 - autonome Roboter,
 - Mikroelektronik,
- Metrologie, z.B. Fortpflanzung von Messunsicherheiten.

Die in MC-Rechnungen verwendeten Zufallszahlen sind sogenannte Pseudo-Zufallszahlen. Sie werden durch einen Algorithmus berechnet und sind deterministisch. Dem Algorithmus wird ein Startwert (= Seed) für die Erzeugung der Zufallszahlen vorgegeben. Bleibt dieser gleich, so erzeugt der Algorithmus (= Generator) immer die gleiche Folge von Zufallszahlen. Jeder Generator hat eine sogenannte Periode, mit der sich die Zufallszahlen systematisch wiederholen. Daher muss die Periode eines Generators hinreichend lang gewählt werden. Wenn z.B. 1000 000 Zufallszahlen benötigt werden, dann sollte die Periode des Generators größer als 1000 000 sein.

Die Anforderungen an Pseudozufallszahlen-Generatoren sind:

1. Die Zufallszahlen müssen paarweise statistisch unabhängig sein.
2. Sie gehören derselben Wahrscheinlichkeitsverteilung an.
3. Die Periode des Generators ist hinreichend lang.

Eine Folge von Pseudozufallszahlen muss ein ähnliches statistisches Verhalten zeigen wie eine Folge von echten Zufallszahlen. Jede so generierte Folge muss möglichst viele der statistischen Tests (siehe dazu [Test-Toolkit](#), [Statistische Tests](#), [Infos](#)) bestehen, die eine Folge von echten Zufallszahlen ([Echte Zufallszahlen](#)) bestehen würde.

6.1 MC-Simulationen am Beispiel des radioaktiven Zerfalls

Ein interessantes Beispiel, anhand dessen sich der Nutzen einer Simulation verdeutlichen lässt, ist der radioaktive Zerfall. So kann die Zerfallsrate eines radioaktiven Präparats mit einem verhältnismäßig kleinem technischen Aufwand gemessen und simuliert werden. Damit ist mindestens ein qualitativer Vergleich zwischen den Simulations- und Messergebnissen während eines Praktikumstermins möglich. Der radioaktive Zerfall von anfänglich N_0 Atomkernen zu einem bestimmten Zeitpunkt t stellt ein sich wiederholendes Bernoulli-Experiment dar, bei dem die Zustände *Zerfall* (= 1) und *Kein Zerfall* (= 0) während einer Zeiteinheit Δt realisiert werden. Dabei beträgt die Zerfallswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit und Atomkern $p = \lambda \cdot \Delta t$, und es wird angenommen, dass jedes Zerfallsereignis vom Detektor erkannt wird und unabhängig von allen anderen stattfindet. Die Zerfallskonstante λ gibt dabei den Anteil der vorhandenen Atome an, der pro Sekunde zerfällt. Sie wird daher auch als Zerfallswahrscheinlichkeit pro Sekunde oder als relative Zerfallsrate aufgefasst. Das ist so zu verstehen: Von den Kernen eines Ensembles zerfällt pro Sekunde eine bestimmte Anzahl.

Wird diese Anzahl auf die Gesamtzahl der Kerne vor einem Zerfall bezogen, ergibt sich die relative Häufigkeit, mit der Kerne zerfallen. Sie lässt sich als Zerfallswahrscheinlichkeit im Sinne der klassischen Wahrscheinlichkeit nach Laplace interpretieren. Da die Zerfälle immer innerhalb einer bestimmten Zeit stattfinden, ist diese Wahrscheinlichkeit auf eine Zeit zu beziehen. So ergibt sich je nach Standpunkt die Zerfallswahrscheinlichkeit pro Sekunde oder die relative Zerfallsrate:

$$\lambda = \frac{\frac{\Delta N}{N}}{\Delta t} = \frac{p}{\Delta t}. \quad (1)$$

Die Abbildung 2 verdeutlicht den Prozess des radioaktiven Zerfalls und macht dessen binären Charakter klar. Die Anzahl der Atomkerne, die pro Zeiteinheit von einem bestimmten Zeitpunkt an gerechnet zerfallen, sind symbolisch in Abbildung 2 durch die Positionen (3) und (6) dargestellt. Bei einem gegebenen Ensemble von Atomkernen N_0 ist daher die Anzahl an unabhängig voneinander zerfallenden Atomkernen ΔN pro Zeiteinheit Δt binomialverteilt. Die Wahrscheinlichkeit $B_{N_t,p}(\Delta N_t)$ dafür, dass genau ΔN_t Atomkerne zur Zeit t pro Zeiteinheit Δt von insgesamt N_t Atomkernen zerfallen, ist dann gegeben durch [Bo95] (nehmen Sie auch diese Gleichung ersteinmal als gegeben hin):

$$B_{N_t,p}(\Delta N_t) = \frac{N_t!}{(N_t - \Delta N_t)! \cdot \Delta N_t!} \cdot p^{\Delta N_t} \cdot (1 - p)^{N_t - \Delta N_t}. \quad (2)$$

Der Einfachheit wegen ist Δp gleichgesetzt worden mit p . Beides bezeichnet also die Zerfallswahrscheinlichkeit pro Zeit. Nachdem in einer Zeiteinheit eine bestimmte Anzahl von Atomkernen zerfallen ist, steht für die nächste Zeiteinheit eine kleinere Anzahl an Atomkernen zur Verfügung, von denen wiederum ein Teil zerfallen wird. Dies wiederholt sich, bis alle Atomkerne zerfallen sind. Dies ist in Abbildung 3 verdeutlicht. Für jeden Zeitschritt existiert eine bestimmte Anzahl an Atomkernen, die als statistisches Ensemble aufgefasst werden. Von diesem Ensemble zerfällt eine bestimmte, nicht vorhersagbare Anzahl an Atomkernen. Dabei ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ΔN_t innerhalb der Zeiteinheit Δt nach dem Zeitpunkt t zerfallen, durch Gleichung 2 gegeben. Das bedeutet für das Beispiel in Abbildung 3, dass zum Zeitpunkt $t = 10$ a etwa 55 Kerne anfangs vorhanden sind. Von diesen zerfallen daraufhin innerhalb von $\Delta t = 10$ a etwa $\Delta N_{10} = 25$ Kerne. Zum Zeitpunkt $t = 20$ a gibt es daher nur noch 30 Kerne, von denen im nächsten Zeitschritt $\Delta N_{20} = 14$ Kerne zerfallen usw.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nach dem Zeitpunkt $t = 10$ a innerhalb der Zeiteinheit von $\Delta t = 10$ a etwa $\Delta N_{10} = 25$ Kerne zerfallen, ist gegeben durch:

$$B_{N_{10},p}(\Delta N_{10}) = B_{N_{10}=55,p}(\Delta N_{10} = 25). \quad (3)$$

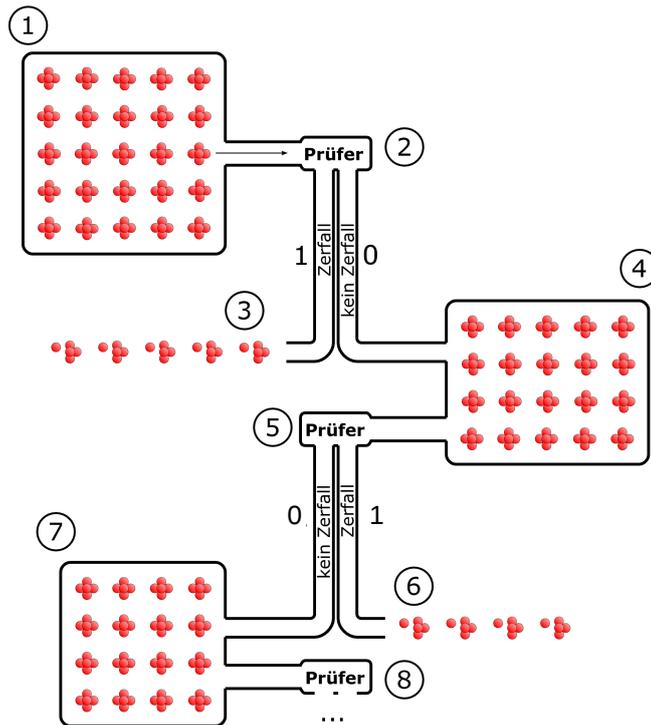


Abbildung 2: Radioaktiver Zerfall als sich wiederholendes Bernoulli-Experiment. Ausgehend von dem Ensemble von Atomkernen unter (1) zerfallen in der ersten Zeiteinheit so viele Atomkerne, wie für jeden der Kerne eine 1 mit der Wahrscheinlichkeit $p = \lambda \cdot \Delta t$ gewürfelt wird, siehe (2) + (3). Der nicht zerfallene Rest (4) durchläuft in der folgenden Zeiteinheit erneute Bernoulli-Experimente.

Die Anzahl der zerfallenden Atomkerne $\Delta N_{10} = 25$ ist jedoch nicht vorher festgelegt. Jeder Wert, der im Rahmen der Binomialverteilung erlaubt ist, hätte auftreten können.

In dem vorliegenden Beispiel ergab sich der Wert aus dem Zerfallsgesetz:

$$N(t) = N_0 \cdot \exp(-\lambda \cdot t) \quad (4)$$

mit $N_0 = 100$ und $\lambda = 0,06/a$ (Halbwertszeit $T_{1/2} = 11,6$ a) für ein hypothetisches Radionuklid. Zu jedem Zeitpunkt gibt es demnach eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Anzahl an Atomkernen, die in der folgenden Zeiteinheit zerfallen werden, wobei vorher nicht festgelegt ist, wie viele letztendlich zerfallen. Dies erklärt, warum keine exakte Exponentialfunktion für den Zerfall im Experiment gemessen wird.

Da die Anzahl der Atomkerne am Anfang einer Zeiteinheit von Zeitpunkt zu Zeitpunkt verschieden ist, handelt es sich um verschiedene Binomialverteilungen. Für alle Zeitpunkte wird aber angenommen, dass die Zerfallswahrscheinlichkeit gleich bleibt. Ist die Zerfallswahrscheinlichkeit klein genug, das heißt, dass die Halbwertszeit groß genug ist, so wird sich die Anzahl der vorhandenen Kerne im Laufe des Praktikumsversuchs (ca. 3 h) praktisch nicht ändern. Das Radionuklid ^{137}Cs , das im Praktikumsversuch verwendet wird, hat eine Halbwertszeit von etwa $T_{1/2} = 30,2$ a und ist damit repräsentativ für den hier beschriebenen Fall langer Halbwertszeiten. Für das hypothetische Radionuklid ergibt sich eine Zerfallskurve wie in Abbildung 4. Sie scheint konstant zu sein, weshalb nicht zu erwarten wäre, überhaupt einen Zerfall innerhalb einer Zeiteinheit Δt messen zu können. Reale Proben vereinen jedoch Teilchenzahlen in sich, die in der Größenordnung von 10^{15} liegen, weswegen dennoch Zerfälle gemessen werden. Wenn nur hinreichend viele Atomkerne vorhanden sind, werden schon einige zerfallen.

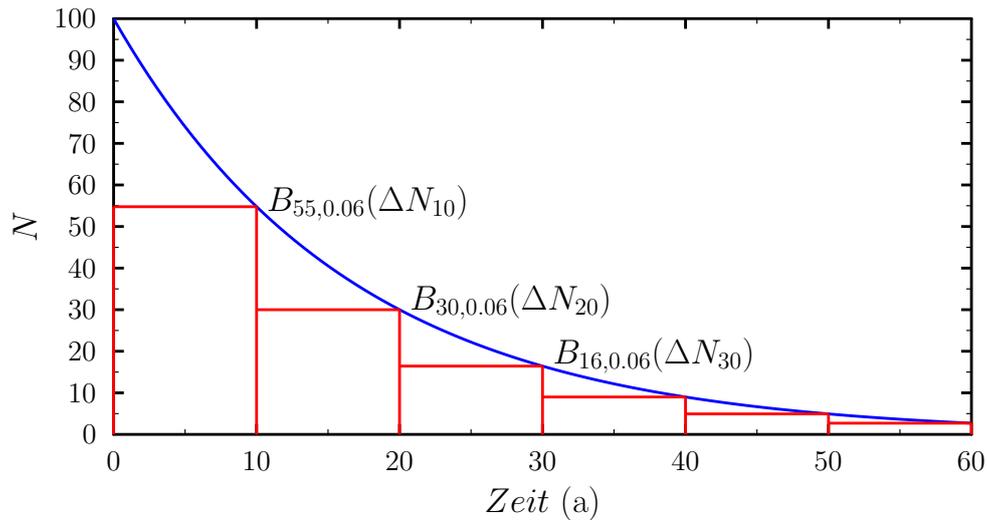


Abbildung 3: Das radioaktive Zerfallsgesetz genähert durch diskretisierte Zeitschritte. Für jeden Zeitschritt existiert eine bestimmte Anzahl an Atomkernen, die als statistisches Ensemble aufgefasst werden. Von diesem Ensemble zerfällt eine bestimmte nicht vorhersagbare Anzahl an Atomkernen. Dabei ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ΔN_t innerhalb der Zeiteinheit Δt nach dem Zeitpunkt t zerfallen, durch $B_{N_t,p}(\Delta N_t)$ gegeben.

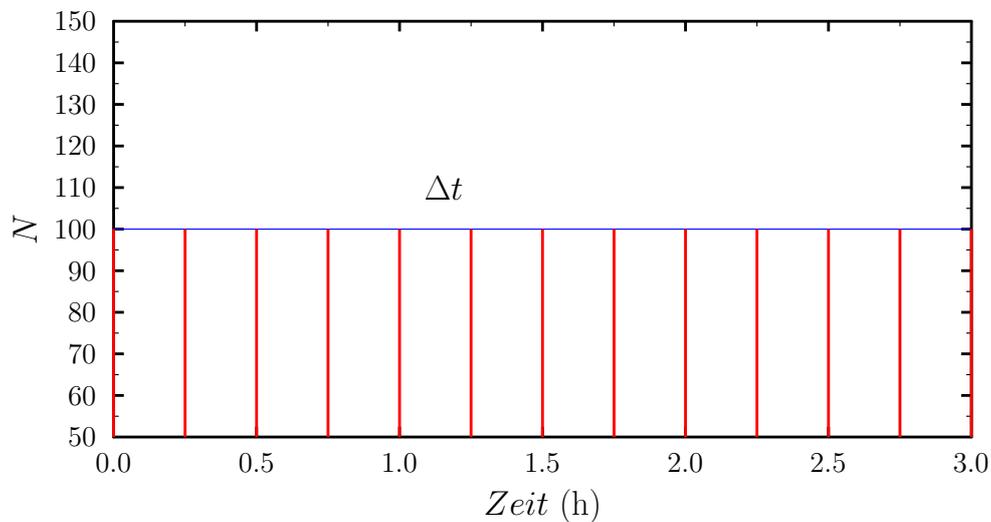


Abbildung 4: Zerfallskurve des hypothetischen Radionuklids über einen kurzen Zeitraum von 3 h betrachtet. Die Anzahl der Atomkerne scheint konstant zu bleiben. Die Breite der Histogrammbalken entspricht der Messzeit Δt . Insgesamt sind im Diagramm 12 Balken zu sehen. Das entspricht 12 Messungen von Impulszahlen ΔN_i jeweils über die Dauer Δt .

Dass die Anzahl der Atomkerne in einer radioaktiven Probe über hinreichend kurze Zeitspannen näherungsweise konstant bleibt, ist auch der Grund dafür, weshalb die Anzahlen der pro Zeiteinheit zerfallenden Atomkerne näherungsweise aus der gleichen Binomialverteilung hervorgehen.

Wird beispielsweise die Messzeit für das hypothetische Radionuklid von $\Delta t_m = 3 \text{ h}$ in mehrere Zeiteinheiten der Länge $\Delta t = 15 \text{ min}$ unterteilt und die Anzahl der zerfallenden Atomkerne jeweils in diesen

Zeiteinheiten gemessen, so würde die normierte relative Häufigkeitsverteilung dieser Anzahlen mit der Binomialverteilung $B_{N_0,p}(\Delta N_0) = B_{100,p}(\Delta N_0)$ verträglich sein. Dies entspräche derjenigen Verteilung, die zum Startzeitpunkt der Messung anzunehmen wäre.

Für reale Teilchenzahlen wird es rechentechnisch unmöglich, die Fakultäten der Binomialverteilung auszuwerten. Die große Teilchenzahl realer radioaktiver Proben erlaubt aber zusammen mit der sehr kleinen Zerfallswahrscheinlichkeit für einen entsprechenden Atomkern eine Näherung der Binomialverteilung durch eine Poissonverteilung, siehe dazu auch das Praktikums Skript zur Datenanalyse.

Im Versuch sollen die Anzahlen an zerfallenen Atomkernen aus verschiedenen Zeitabschnitten hinsichtlich ihrer Wahrscheinlichkeitsdichte qualitativ untersucht werden. Eine wichtige Frage lautet dabei: Mit welcher Wahrscheinlichkeitsdichte ist das Histogramm der Anzahlen an zerfallenen Atomkernen aus den verschiedenen Zeitabschnitten verträglich?

Zusammenfassung: Die am Anfang einer Zerfallszeiteinheit vorhandenen Atomkerne sind symbolisch in [Abbildung 2](#) durch die Positionen (1), (4) und (7) dargestellt. Diese Anzahl von anfänglichen Atomkernen kann durch das Zerfallsgesetz:

$$N(t) = N_0 \cdot \exp(-\lambda \cdot t) \quad (5)$$

beschrieben werden. Die Zerfallsrate ist dabei gegeben durch die zeitliche Ableitung des Zerfallsgesetzes:

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N_0 \cdot \exp(-\lambda \cdot t) = -\lambda \cdot N(t). \quad (6)$$

Was im Experiment zu einem gegebenen Zeitpunkt t mit einem zählenden Detektor gemessen wird, ist ein bestimmter Anteil an der Anzahl an Atomkernen ΔN , die innerhalb des endlich kleinen Zeitintervalls Δt zerfallen, das auf den Zeitpunkt t folgt:

$$\Delta N = \frac{dN(t)}{dt} \cdot \Delta t. \quad (7)$$

Erfolgen wiederholte Messungen der Anzahl an zerfallenden Kernen ΔN_i in der Zeiteinheit Δt über eine Zeitspanne $\Delta t' = n \cdot \Delta t$ mit $i = 1, 2, 3, \dots, n$ und $n \in \mathbb{N}$, siehe [Abbildung 4](#), so folgt die Dichteverteilung der relativen Häufigkeiten der ΔN_i approximativ einer Poissonverteilung, wenn die Halbwertszeit des zerfallenden Radionuklidshinreichend lang ist. Das heißt, dass ein Histogramm über alle n gemessenen Werte ΔN_i erstellt werden muss.

6.2 Methoden und Material

Im ersten Versuchsteil kommt ein handelsüblicher PC (CPU i5 mit 2 physischen Kernen und SSD) zum Einsatz, auf dem die Modellierung und Simulation des radioaktiven Zerfalls durchgeführt werden soll. Die Modellierung und Simulation des radioaktiven Zerfalls basiert auf einer Idee der Initiative Open-SourcePhysics ([Open Source Physics](#)) Siehe dazu auch Kapitel 7 in:

H. Gould, J. Tobochnik, W. Christian: An Introduction to Computer Simulation Methods Applications to physical systems, Pearson Addison Wesley, 2007.

Auf der Basis der dort beschriebenen Idee wurden für den Praktikumsversuch C-Programme erstellt ([Learn-C](#)), die die benötigten Funktionen zur Verfügung stellen. Die erforderlichen Zufallszahlen werden aus den entsprechenden Verteilungsfunktionen gezogen, die die GNU Scientific Library ([GSL](#)) zur Verfügung stellt.

Gesteuert werden diese Programme durch sogenannte Shell-Skripte. Der Start der Shell-Skripte erfolgt über graphische Oberflächen, siehe [Abbildung 5](#).

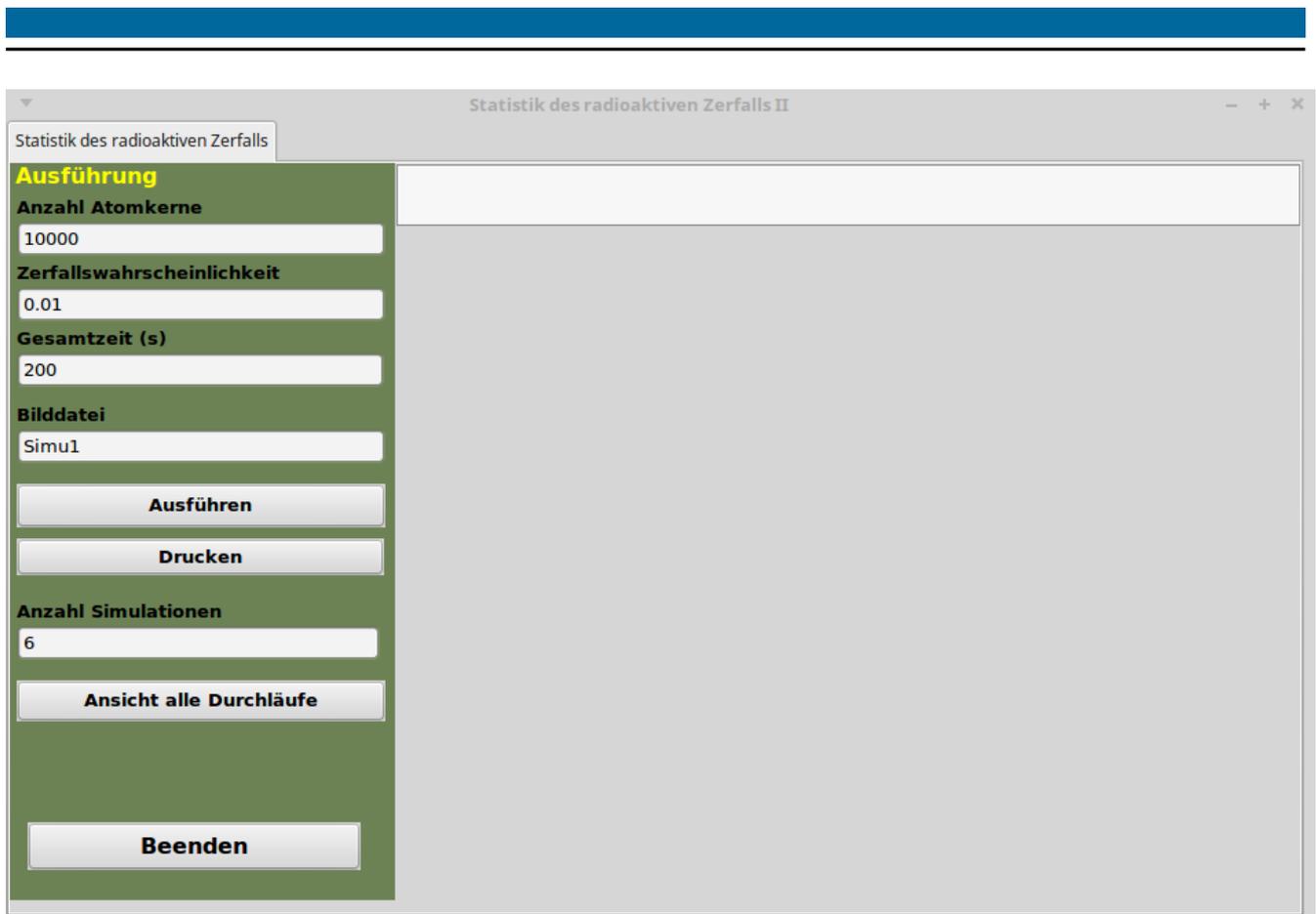


Abbildung 5: Graphische Oberfläche zum Start der Programme für die Untersuchung der Statistik des radioaktiven Zerfalls.

7 Teil II - Signifikanzprüfung eines Messsignals bei Vorhandensein eines Störsignals am Beispiel der Zerfallsrate beim radioaktiven Zerfall

Ein häufig in der Physik, dem Strahlenschutz oder analytischen Chemie auftretendes Problem ist das Messen eines Probensignals vor einem störenden Hintergrundsignal. Dann stellt sich die Frage, ob sich das Probensignal signifikant vom Hintergrundsignal unterscheidet. Nur dann kann davon ausgegangen werden, den physikalischen Effekt beobachtet zu haben. Ein typisches Beispiel aus der Strahlenschutzphysik ist die Untersuchung einer Bodenprobe auf natürliche und anthropogene Radionuklide. Hierzu wird die Bodenprobe mit einem energieauflösenden Spektrometer (meist ein Germanium-Detektor) vermessen. Ein interessierendes Radionuklid kann anhand seiner charakteristischen Zerfallslinien im Spektrum identifiziert werden, siehe Abbildung 6.

Darüber hinaus ist es möglich, dessen spezifische Aktivität zu bestimmen. Dafür müssen einzelne Linien des Radionuklids ausgewertet werden. Manchmal ist die maximale Impulshöhe einer interessierenden Linie klein gegenüber den Impulshöhen der Nachbarstrukturen im Spektrum, siehe die Markierungen in Abbildung 6. Dann stellt sich genau die eingangs erwähnte Frage, ob es sich nun um einen Probenbeitrag oder nur um Beiträge aus dem natürlichen Strahlungshintergrund oder um statistisches Rauschen handelt. Die gleiche Fragestellung ergibt sich auch für nicht energieauflösende, zählende Strahlungsmessungen an einer radioaktiven Probe zum Beispiel mit einem Geiger-Müller-Zählrohr oder einem Dosisleistungsmessgerät, wie es im Versuch verwendet wird. Die primäre Messgröße ist dann eine Bruttozählrate bzw. eine Bruttoimpulszahl, die in einer bestimmten Zeit gemessen worden ist. Für diese Größe muss dann entschieden werden, ob sich ihr Messwert von dem entsprechenden Messwert des reinen Strahlungshintergrunds signifikant unterscheidet.

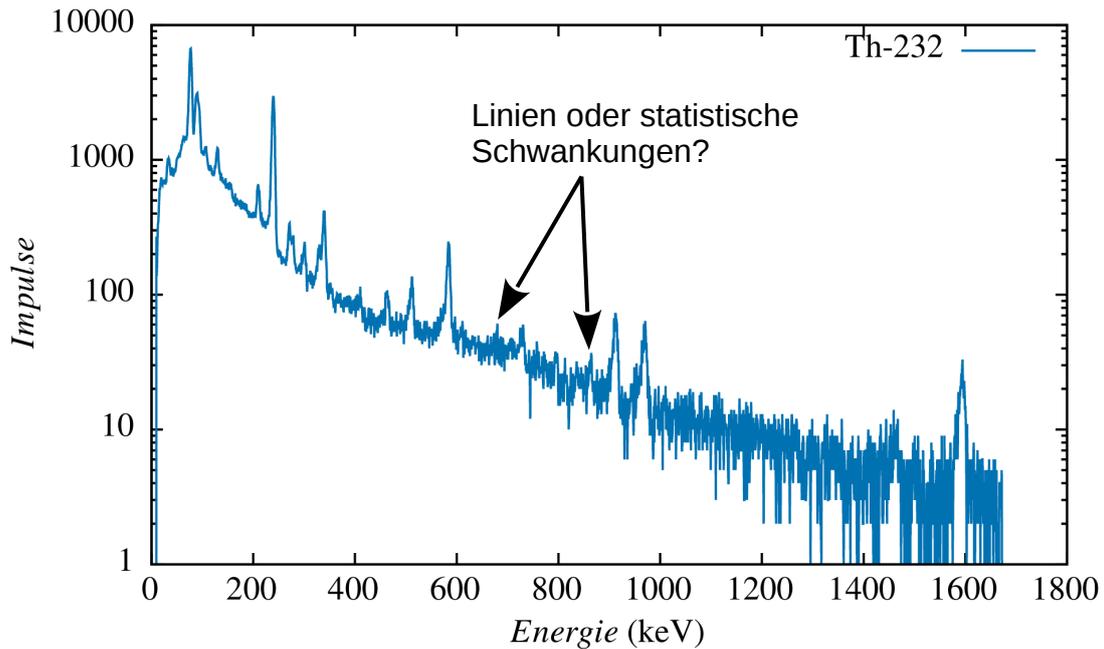


Abbildung 6: Energiespektrum einer Th-232-Probe, aufgenommen mit einem Cd-Zn-Te-Halbleiterdetektor (500 mm³ Kristallvolumen). Im Spektrum sind zwei Strukturen durch Pfeile markiert, die gleichermaßen Linien aber auch statistische Schwankungen des Untergrundes im Spektrum sein könnten.

Sind Bruttozählrate der Probenmessung und Zählrate des Strahlungshintergrundes verträglich, so darf entschieden werden, dass keine Radionuklide in der Probe enthalten sind. Das Problem wird üblicherweise für die Nettozählrate oder Nettoimpulszahl formuliert. Die Entscheidungsfindung kann mit Hilfe der sogenannten Erkennungs- und Nachweisgrenze auf eine mathematisch eindeutige Basis gestellt werden. Die Erkennungsgrenze einer beliebigen Messgröße stellt einen Vergleichswert für den primären Messwert der Größe dar. Ist dieser Messwert größer als die Erkennungsgrenze, dann kann mit einer vorher festgelegten Irrtumswahrscheinlichkeit α entschieden werden, dass sich der Messwert signifikant von null unterscheidet.

Zur Beurteilung des Messverfahrens wird üblicherweise die Nachweisgrenze herangezogen. Durch den Vergleich der Nachweisgrenze mit einem Richtwert, der durch gesetzliche, technische oder anderen Quellen vorgegeben ist, kann entschieden werden, ob das Messverfahren den Messzweck erfüllt. Das Messverfahren gilt als ungeeignet für den Messzweck, wenn der Richtwert kleiner als die Nachweisgrenze ist. Das bedeutet z.B. für zählende Messungen, dass die kleinste mit dem Messverfahren noch nachweisbare Netto-Zählrate (oder Nettoimpulszahl) größer ist als der Richtwert. Messwerte im Bereich des Richtwerts könnten also nicht nachgewiesen werden.

7.1 Definitionen von Erkennungs- und Nachweisgrenze

In diesem Abschnitt geht es um die mathematische Beschreibung der beiden charakteristischen Grenzen. Die Gleichungen dieses Abschnitts werden nicht in der Vorbesprechung abgefragt.

Für eine gegebene primäre Messgröße n_n , z.B. eine Nettoimpulszahl, ist die Erkennungsgrenze n_n^* definiert als das $(1 - \alpha)$ -Quantil der Wahrscheinlichkeitsdichte $f(n_n | \tilde{n}_n)$ (Likelihood) dieser Messgröße unter der Annahme, dass der vermutete physikalische Effekt nicht vorliegt. Diese Annahme für den sogenannten wahren Wert \tilde{n}_n wird durch $\tilde{n}_n = 0$ in der Dichtefunktion ausgedrückt: $f(n_n | \tilde{n}_n = 0)$. Dies ist

folgendermaßen zu lesen: f von n_n , gegeben der wahre Wert $\tilde{n}_n = 0$. Alternativ bedeutet dies: f von n_n unter der Bedingung, dass der wahre Wert $\tilde{n}_n = 0$ ist. Der Begriff des Vorliegens eines physikalischen Effekts ist direkt mit dem wahren Wert \tilde{n}_n verknüpft. Die Aussage $\tilde{n}_n = 0$ bedeutet, dass kein physikalischer Effekt vorliegt. Eine dann gemessene Zählrate geht daher nicht auf eine radioaktive Quelle im Präparat zurück. Die Abbildung 7 visualisiert die Definitionen beider Grenzen. Die Definition der Erkennungsgrenze lautet mit der vorgegebenen Irrtumswahrscheinlichkeit α :

$$P(n_n > n_n^* | \tilde{n}_n = 0) = \int_{n_n^*}^{+\infty} dn_n \cdot f(n_n | \tilde{n}_n = 0) = \alpha. \quad (8)$$

In Worten bedeutet diese Gleichung: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Messwert n_n größer ist als die Erkennungsgrenze n_n^* , gegeben ein wahrer Wert $\tilde{n}_n = 0$ (also kein physikalischer Effekt), beträgt α .

Die Integration der Wahrscheinlichkeitsdichte wird demnach solange von links kommend durchgeführt, bis der Wert α erreicht ist. Die so erhaltene rechte Integrationsgrenze legt dann die Erkennungsgrenze fest. Wird in diesem besonderen Fall ein Messwert n_n gemessen, der die Erkennungsgrenze n_n^* überschreitet, und wird deshalb vom Experimentator entschieden, dass ein physikalischer Effekt vorliegt, so kann diese Entscheidung in $100 \cdot \alpha$ % der Fälle, in denen die Messung wiederholt wird, falsch sein.

Die Nachweisgrenze $n_n^\#$ baut darauf auf und wird über das β -Quantil der Wahrscheinlichkeitsdichte $f(n_n | \tilde{n}_n = n_n^\#)$ definiert. Dann wird angenommen, dass für den wahren Wert $\tilde{n}_n = n_n^\#$ gilt und ein physikalischer Effekt vorliegt. Das heißt, dass das Meßpräparat eine radioaktive Quelle enthält. Die Definition der Nachweisgrenze lautet mit der Irrtumswahrscheinlichkeit β :

$$P(n_n < n_n^* | \tilde{n}_n = n_n^\#) = \int_{-\infty}^{n_n^*} dn_n \cdot f(n_n | \tilde{n}_n = n_n^\#) = \beta. \quad (9)$$

In Worten bedeutet diese Gleichung: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Messwert n_n kleiner als die Erkennungsgrenze n_n^* ist, gegeben ein wahrer Wert $\tilde{n}_n = n_n^\#$ (ein physikalischer Effekt liegt vor), beträgt β . Das bedeutet, dass bei hinreichend oft wiederholten Messungen des Messpräparats, das den physikalischen Effekt durch $\tilde{n}_n = n_n^\#$ verursacht (es ist also eine radioaktive Quelle enthalten), nur $100 \cdot \beta$ % der Messwerte unterhalb der Erkennungsgrenze liegen. Wäre der wahre Wert kleiner als die Nachweisgrenze, $\tilde{n}_n < n_n^\#$ und $\tilde{n}_n > 0$, so würde die Anzahl an Messungen steigen, deren Messwerte unter der Erkennungsgrenze lägen. Für diese würde fälschlicherweise entschieden, dass kein physikalischer Effekt vorläge. In der Fachsprache heißt es deshalb: Die Nachweisgrenze ist der kleinste wahre Wert, der bei vorgegebener (kleiner) Irrtumswahrscheinlichkeit β mit dem gegebenen Messverfahren noch erkannt werden kann. Häufig werden die Irrtumswahrscheinlichkeiten α und β auf 0,05 (= 5 %) gesetzt, wie auch in den Shell-Skripten zu diesem Versuch.

In der Praxis lassen sich die Wahrscheinlichkeitsdichten $f(n_n | \tilde{n}_n = 0)$ und $f(n_n | \tilde{n}_n = n_n^\#)$ oft durch Gauß-Verteilungen hinreichend genau nähern. Für kleine Impulszahlen, wie sie im Versuch auftreten, ist es jedoch sinnvoller, Poisson-Verteilungsdichten zu verwenden. Um die Erkennungs- und Nachweisgrenze zu berechnen, müssen die beiden Wahrscheinlichkeitsdichten $f(n_n | \tilde{n}_n = 0)$ und $f(n_n | \tilde{n}_n = n_n^\#)$ bestimmt werden. Sind diese bekannt, so wird zuerst die Erkennungsgrenze als das $(1-\alpha)$ -Quantil der Dichte $f(n_n | \tilde{n}_n = 0)$ berechnet. Ist das primäre Messergebnis größer als die Erkennungsgrenze, wird der Wert des sogenannten besten Schätzers, der beste Schätzwert, für die Messgröße berechnet (und nur dann!). Der beste Schätzwert ergibt sich aus dem Erwartungswert der Wahrscheinlichkeitsdichte, die aus der Faltung einer Stufenfunktion mit der Wahrscheinlichkeitsdichte der Messgröße hervorgeht (hier die Nettoimpulszahl), siehe Abbildung 8. Die Stufenfunktion erscheint hier, weil die Messgröße aus physikalischer Sicht eine nicht negative Größe darstellt. Hinsichtlich des Bayesschen Ansatzes im Konzept der Messunsicherheiten ist die Stufenfunktion die Prior-Dichte im Bayesschen Theorem. Die Wahrscheinlichkeitsdichte der Messgröße ist die Likelihood und die aus dem Bayesschen Theorem hervorgehende

Dichte stellt die Posterior-Dichte dar. Die Unsicherheit des besten Schätzwerts folgt dann aus der Varianz der Posterior-Dichte.

Um die Nachweisgrenze zu ermitteln, wird in dem Versuch eine Wahrscheinlichkeitsdichte $f(n_n|\tilde{n}_n)$ verwendet, die von kleinen wahren Werten $0 < \tilde{n}_n < n_n^\#$ kommend so weit zu größeren hin verschoben wird, bis ihr β -Quantil mit der Erkennungsgrenze im Rahmen einer vorgegebenen Toleranz verträglich ist. Der Erwartungswert dieser justierten Wahrscheinlichkeitsdichte kann dann als Nachweisgrenze angesetzt werden.

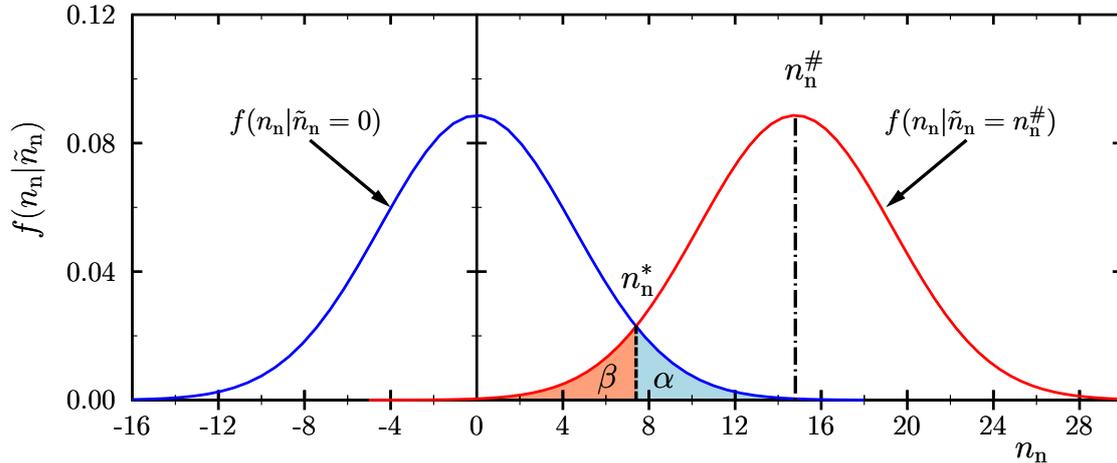


Abbildung 7: Festlegung von Erkennungsgrenze (blau) und Nachweisgrenze (rot) über die Irrtumswahrscheinlichkeiten α und β . Die Wahrscheinlichkeitsdichte einer Messgröße spiegelt die Verteilung ihrer Messwerte wider, wenn die Messgröße wiederholt gemessen würde.

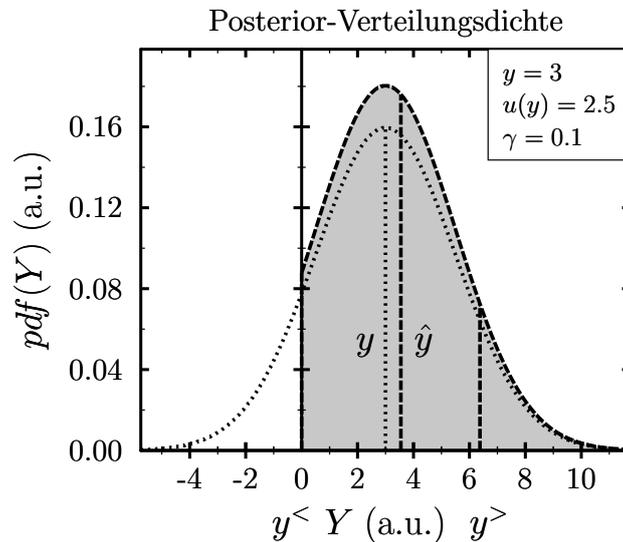


Abbildung 8: Die Posterior-Dichte $f(\tilde{n}_n|n_n, I)$ (durchgezogen, grau) entsteht aus der Faltung der Likelihood-Dichte $f(n_n|\tilde{n}_n, I)$ der primären Messgröße (gepunktet) mit der Prior-Heavisidefunktion $f(\tilde{n}_n)$ und anschließender Renormierung. Zusätzlich ist der beste Schätzwert \hat{n}_n eingezeichnet, der sich als Erwartungswert aus dem Posterior ergibt. $y^<$ und $y^>$ stellen die untere und obere Grenze des sogenannten Überdeckungsintervalls dar.

7.2 Und was bedeutet das jetzt?

In diesem Abschnitt geht es um die Veranschaulichung der beiden charakteristischen Grenzen und damit um die grundlegenden Ideen dahinter. Die hier erläuterten Zusammenhänge werden in der Vorbesprechung abgefragt.

7.2.1 Erkennungsgrenze

Nehmen Sie an, dass Ihr zu vermessendes Präparat keine Aktivität enthielte und daher der wahre Wert für die Nettoimpulszahl $\tilde{n}_n = 0$ wäre. Die Bruttoimpulszahl n_b würden Sie mit dem Detektor dieses Versuchs z.B. über eine Zeit $t_b = 10$ s messen. Außerdem würden Sie die Hintergrundimpulszahl n_0 einmalig über eine deutlich längere Messzeit $t_0 \gg t_b$ bestimmen. Anschließend würden Sie die Hintergrundimpulszahl für die Dauer der Präparatemessung ausrechnen. Ihre Nettoimpulszahl wäre dann gegeben durch: $n_n = n_b - (t_b/t_0) \cdot n_0$. Wenn Sie diese 10-sekündige Messung der Bruttoimpulszahl 1000-mal wiederholen und die Nettoimpulszahlen ausrechnen würden, so würden sich die gemessenen Nettoimpulszahlen gaußförmig um die null verteilen. Das läge daran, dass die Bruttoimpulszahlen von Messung zu Messung zufällig schwanken.

In der Praxis würden Sie natürlich nur eine einzelne Messung durchführen und keine Stichprobe vom Umfang 1000 erheben. Die Nettoimpulszahl, die Sie aus diesem einen Messwert berechnen würden, müssten Sie anschließend im Rahmen der (erwarteten) Wahrscheinlichkeitsdichte der Messwerte bewerten. Dabei würde es sich um genau diejenige Wahrscheinlichkeitsdichte $f(n_n | \tilde{n}_n = 0)$ handeln, die die Verteilung der möglichen Messwerte beschreibt, wenn der wahre Wert der Nettoimpulszahl null ist.

Im Prinzip kann jeder einzelne Messwert n'_n zu dieser Wahrscheinlichkeitsdichte der Messwerte $f(n_n | \tilde{n}_n = 0)$ gehören. Das hilft Ihnen aber nicht weiter, schließlich möchten Sie eine Entscheidung treffen, ob Sie ein Präparatesignal erkannt haben oder nicht. Deshalb müssen Sie eine Grenze n_n^* festlegen, ab der Sie bereit sind zu entscheiden, dass ein Präparatesignal, also eine wahre Nettoimpulszahl $\tilde{n}_n > 0$ vorliegt. Sie möchten natürlich das Risiko minimieren, bei einer solchen Entscheidung falsch zu liegen. Sie verschieben deshalb die Grenze n_n^* so weit nach rechts zu größeren Werten hin, dass z.B. nur noch 5 % aller Werte, die von der Wahrscheinlichkeitsdichte $f(n_n | \tilde{n}_n = 0)$ überdeckt werden und daher als Messwerte in Frage kommen, rechts von dieser Grenze liegen, siehe Abbildung 9 (c).

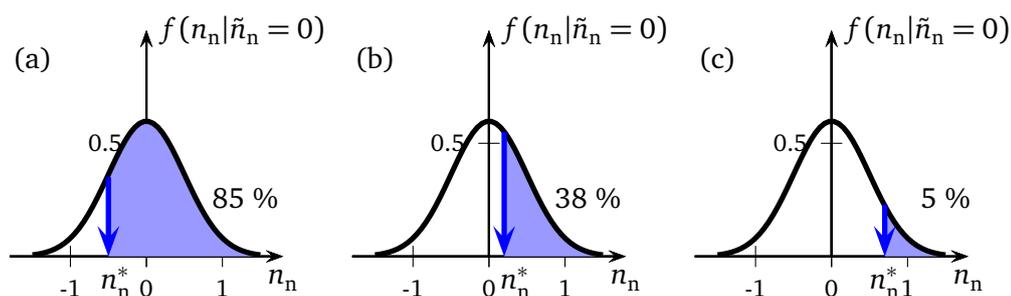


Abbildung 9: Festlegung der Erkennungsgrenze n_n^* . Von kleinen Werten kommend wird diese so lange nach rechts verschoben, bis rechts von der Erkennungsgrenze nur noch ein bestimmter Anteil an möglichen Messwerten liegt.

Das bedeutet, dass Messwerte, die gleich oder größer als diese Grenze n_n^* sind, nur selten auftreten, wenn die wahre Nettoimpulszahl null ist. Wenn Sie nun einen Messwert erhalten haben, der größer als die Grenze n_n^* ist, dann entscheiden Sie, dass der wahre Wert der Nettoimpulszahl $\tilde{n}_n > 0$ ist, siehe Abbildung 10 (b). Wäre der wahre Wert null, dann wäre die Wahrscheinlichkeit, den gemessenen Wert oder einen größeren Messwert zu erhalten, einfach zu klein.

Deshalb würden Sie entscheiden, dass ein wahrer Wert ungleich null vorliegt. Sie haben einen Probenbeitrag erkannt. Diese Grenze n_n^* nennen Sie Erkennungsgrenze.

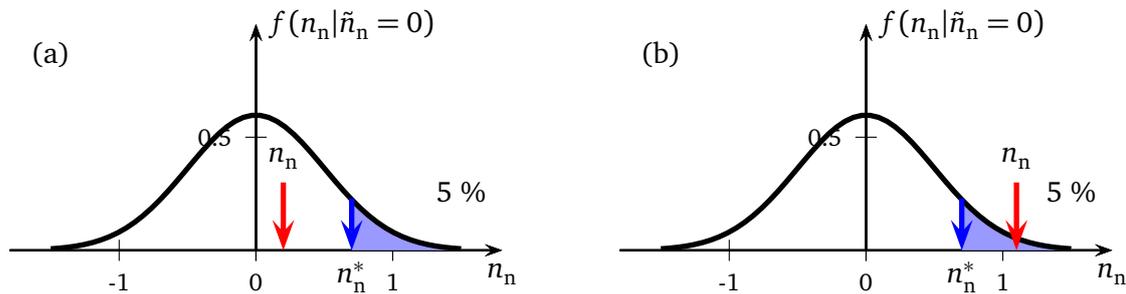


Abbildung 10: (a): Liegt der Messwert n_n **unterhalb** der Erkennungsgrenze n_n^* , so wird entschieden, dass **kein** Probenbeitrag erkannt worden ist, also $\tilde{n}_n = 0$. (b): Liegt der Messwert n_n **oberhalb** der Erkennungsgrenze n_n^* (a), so wird entschieden, dass **ein** Probenbeitrag erkannt worden ist, also $\tilde{n}_n > 0$.

7.2.2 Nachweisgrenze

Nehmen Sie jetzt an, dass der wahre Wert Ihrer Nettimpulszahl gleich der zuvor bestimmten Erkennungsgrenze ist, also $\tilde{n}_n = n_n^*$. Würden Sie erneut 1000-mal messen, erhielten Sie im besten Fall eine gaußförmige Wahrscheinlichkeitsdichte der Messwerte um die Erkennungsgrenze herum. 50 % der Werte, die diese Dichte überdeckt und die als Messwerte auftreten können, sind damit kleiner als die Erkennungsgrenze. Bei 500 von den 1000 durchgeführten Messungen würden Sie also entscheiden, dass kein Präparatesignal vorliegt, siehe Abbildung 11 (a). Das ist unbefriedigend, da in Wahrheit ein Präparatesignal vorhanden ist. Die sich stellende Frage lautet daher: Wie groß ist der kleinste wahre Wert der Nettoimpulszahl, für den hinreichend viele Messwerte oberhalb der Erkennungsgrenze liegen, wenn wiederholt gemessen und damit aus der Wahrscheinlichkeitsdichte der Messwerte würfelt wird. Als hinreichend viele darf man den in der Statistik üblichen Wert von 95 % ansetzen. Dann würden 5 % der Messwerte unterhalb der Erkennungsgrenze liegen.

Diese kleinste wahre Nettoimpulszahl bestimmen Sie relativ zur Erkennungsgrenze. Nur 5 % der als Messwerte in Frage kommenden Werte, die die zur gesuchten wahren Nettoimpulszahl gehörige Wahrscheinlichkeitsdichte der Messwerte überdeckt, sollen kleiner als die Erkennungsgrenze sein.

Nachdem die Dichte relativ zur Erkennungsgrenze justiert worden ist, wird deren Zentroid, hier unter der Annahme einer gaußförmigen Wahrscheinlichkeitsdichte der Messwerte, als die gesuchte Nachweisgrenze angesetzt, siehe Abbildung 11 (b). Die Nachweisgrenze ist damit der kleinste wahre Wert der Nettoimpulszahl, für den wir bereit sind, davon auszugehen, dass hinreichend viele Messwerte bei wiederholten Messungen oberhalb der Erkennungsgrenze, oder anders gesagt, dass hinreichend wenige Messwerte unterhalb der Erkennungsgrenze liegen würden.

Nehmen Sie an, Sie würden mit Ihrem Detektor überprüfen wollen, ob ein bestimmter Richt- oder Grenzwert n_{RW} für die wahre Nettoimpulszahl \tilde{n}_n eingehalten wird, also ob $\tilde{n}_n \leq n_{RW}$ gilt. Der Richt- oder Grenzwert sei dabei kleiner als die Nachweisgrenze, also $n_{RW} < n_n^\#$.

Darüber hinaus nehmen Sie jetzt an, dass die wahre Nettoimpulszahl zwischen einem geforderten Richtwert (RW) und der Nachweisgrenze liegt, der RW also überschritten wird: $n_{RW} \leq \tilde{n}_n \leq n_n^\#$. Da die wahre Nettoimpulszahl kleiner ist als die Nachweisgrenze, müssen Sie erwarten, dass die Messwerte in mehr als 5 % von wiederholten Messungen unterhalb der Erkennungsgrenze liegen. Dann würden Sie in diesen Fällen aber entscheiden, dass die wahre Nettoimpulszahl null ist und damit der Richtwert unterschritten wird, obwohl das nicht der Fall ist, siehe Abbildung 12.

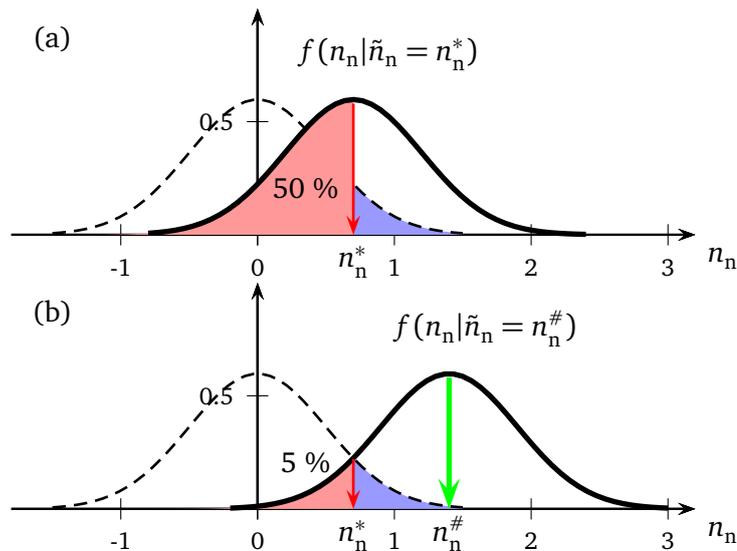


Abbildung 11: (a): Entspricht der wahre Wert der Erkennungsgrenze, also $\tilde{n}_n = n_n^*$, so liegen 50 % der möglichen Messwerte unterhalb der Erkennungsgrenze. Die Hälfte der Messwerte aus wiederholten Messungen würden also zu der Entscheidung $\tilde{n}_n = 0$ führen, obwohl in Wahrheit gilt: $\tilde{n}_n = n_n^* > 0$. (b): Liegen nur noch 5 % der möglichen Messwerte unterhalb der Erkennungsgrenze n_n^* , dann definiert der Zentroid der hier angenommenen gaußförmigen Wahrscheinlichkeitsdichte die Nachweisgrenze $n_n^\#$.

Gerade wenn es um die Sicherheit von Mensch, Tier und Umwelt geht, denken Sie etwa an einen radiologischen Krisenfall, ist eine erhöhte Fehlentscheidungsrate nicht akzeptabel. Bei einem radiologischen Krisenfall kann es sich um einen Reaktorunfall mit Freisetzung von Radioaktivität handeln. In einem solchen Krisenfall würde z.B. die ^{90}Sr -Aktivität in Umweltproben überprüft und mit einem Grenzwert verglichen.

Diese Überlegungen machen deutlich, dass eine hinreichend belastbare Aussage darüber, in welchem Verhältnis eine wahre Nettoimpulszahl zu einem Richt- oder Grenzwert steht, nur dann vorgenommen werden kann, wenn gilt: $n_n^\# \leq n_{\text{RW}}$.

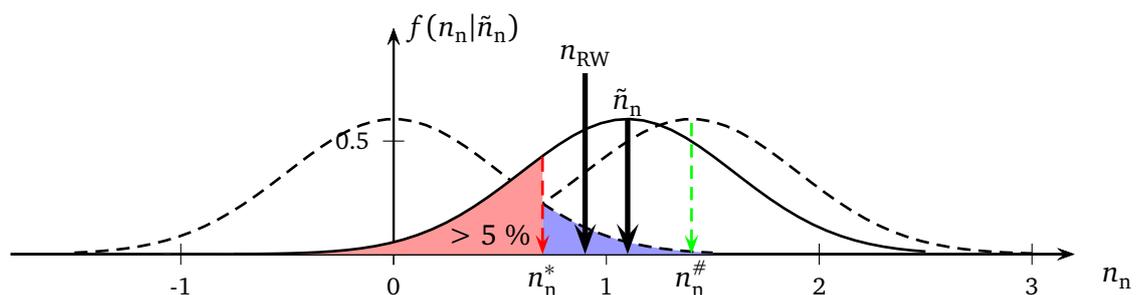


Abbildung 12: Mögliche Fehlentscheidung bei Unterschreiten der Nachweisgrenze durch einen Richtwert. Liegt die wahre Nettoimpulszahl \tilde{n}_n unterhalb der Nachweisgrenze $n_n^\#$, aber oberhalb eines Richtwerts n_{RW} , so werden mehr als 5 % der Messwerte bei wiederholten Messungen unterhalb der Erkennungsgrenze n_n^* liegen. Dann würde aber zu oft fehlerhafterweise entschieden, dass die wahre Nettoimpulszahl null und damit kleiner als der Richtwert wäre.

7.3 Bestimmung von Erkennungs- und Nachweisgrenze für kleine Impulszahlen vor einem störenden Hintergrundsignal

Sie sollten für die Vorbesprechung wissen, was die Gleichungen 10 und 11 bedeuten, und welche Idee Abbildung 13 widerspiegelt.

Im Praktikumsversuch sollen Erkennungs- und Nachweisgrenze für eine zählende Messung an einer radioaktiven Probe vor einem störenden Hintergrund bestimmt werden. Dazu muss einmal der Strahlungshintergrund und dann die Probe vermessen werden. Außerdem wird angenommen, dass die gemessenen Impulszahlen poissonverteilt sind. Die Ausgangsgröße des Modells der Auswertung und damit die primäre Messgröße ist die Nettozählrate r_n :

$$r_n = r_b - r_0 = \frac{n_b}{t_b} - \frac{n_0}{t_0} \quad (10)$$

mit den Messgrößen:

- n_b = Bruttoimpulszahl,
- n_0 = Hintergrundimpulszahl,
- t_b = Messzeit der Bruttoimpulszahl,
- t_0 = Messzeit der Hintergrundimpulszahl,
- r_b = Bruttozählrate,
- r_0 = Hintergrundzählrate.

Für den Versuch wird das Modell umgeschrieben, sodass es die Nettoimpulszahl n_n aus Ausgangsgröße enthält:

$$n_n = n_b - n_0 \cdot \frac{t_b}{t_0} = n_b - n_{0,s}. \quad (11)$$

Um die Erkennungsgrenze n_n^* für die Nettoimpulszahl zu berechnen, werden zunächst Zufallszahlen aus den Wahrscheinlichkeitsdichten gezogen, die der Bruttoimpulszahl n_b und der skalierten Hintergrundimpulszahl $(t_b/t_0) \cdot n_0$ noch zuzuordnen sind.

Nachdem je eine Zufallszahl aus jeder Dichte gezogen worden ist, wird die Differenz dieser Impulszahlen gebildet und gespeichert. Diese Differenzen folgen selbst wieder einer bestimmten Wahrscheinlichkeitsdichte. Dies ist die Wahrscheinlichkeitsdichte für die Nettoimpulszahl.

Für die Wahrscheinlichkeitsdichte der Bruttoimpulszahl wird eine Poissonverteilungsdichte mit zunächst noch unbekanntem Erwartungswert angesetzt, also $f(n_b | \tilde{n}_b = \bar{n}_b = \text{variabel})$. Die Wahrscheinlichkeitsdichte der skalierten Hintergrundimpulszahl wird ebenfalls durch eine Poissonverteilungsdichte beschrieben, wobei diese aber sofort spezifiziert wird. Ihr Erwartungswert entspricht dem Messwert $(t_b/t_0) \cdot n_0$ aus der Hintergrundmessung, also $f(n_{0,s} | \tilde{n}_{0,s} = (t_b/t_0) \cdot n_0)$.

In aller Strenge müsste nun eine Iteration durchgeführt werden, bei der der Erwartungswert \bar{n}_b der Poissonverteilungsdichte $f(n_b | \tilde{n}_b = \bar{n}_b)$ für die Bruttoimpulszahl stetig verkleinert wird, bis er mit dem Erwartungswert der Poissonverteilungsdichte $f(n_{0,s} | \tilde{n}_{0,s} = (t_b/t_0) \cdot n_0)$ der skalierten Hintergrundimpulszahl übereinstimmt. Der Erwartungswert der Bruttoimpulszahl müsste anfangs hinreichend groß gewählt werden. Nach jeder Iteration würde die Differenzbildung erfolgen. Da die Erwartungswerte von Bruttoimpulszahl und skalierten Hintergrundimpulszahl am Ende der Iteration theoretisch übereinstimmen würden, kann die Erkennungsgrenze auch ohne Iteration berechnet werden, indem die Erwartungswerte der Verteilungsdichten für beide Impulszahlgrößen gleichgesetzt werden.

Das bedeutet, dass nur die beiden Verteilungen:

$$f(n_b|\tilde{n}_b = (t_b/t_0) \cdot n_0) \text{ und } f(n_{0,s}|\tilde{n}_{0,s} = (t_b/t_0) \cdot n_0). \quad (12)$$

betrachtet werden brauchen.

Numerisch führt dies aber auf ein Problem. Ein Zufallszahlengenerator in Standardeinstellung, der Zufallszahlen aus diesen beiden Verteilungen zieht, wird immer identische Folgen von Zufallszahlen ausgeben, wenn er wiederholt neu gestartet wird. Die Differenzen der Zufallszahlen werden dann immer null sein, was unphysikalisch ist. Deshalb muss der Zufallszahlengenerator mit verschiedenen Startwerten (seeds) gestartet werden. Aus jedem Neustart des Generators geht dann eine Folge von Zufallszahlen hervor, die aus Dichten mit gleichem Erwartungswert, aber unterschiedlichen Startwerten des Generators stammen. Nun werden die paarweisen Zufallszahlen für die Bruttoimpulszahl und die skalierte Hintergrundimpulszahl nicht mehr identisch sein. Die Differenzen aus den Zufallszahlen für n_b und $n_{0,s}$ werden sich um $n_n = 0$ verteilen. Die Erkennungsgrenze entspricht dann dem 95 %-Quantil der Wahrscheinlichkeitsdichte der berechneten Differenzen, also der Nettoimpulszahl.

Die Nachweisgrenze $n_n^\#$ für die Nettoimpulszahl n_n ergibt sich aus einer iterativen Berechnung von poissonverteilten Zufallszahlen für die Bruttoimpulszahl n_b , von denen Zufallswerte aus der Wahrscheinlichkeitsdichte für die skalierten Hintergrundimpulszahlen $n_{0,s}$ abgezogen werden. Der Erwartungswert der Dichte für die Hintergrundimpulszahlen entspricht dabei dem gemessenen Wert $(t_b/t_0) \cdot n_0$. Die Iteration beginnt mit Zufallszahlen für die Bruttoimpulszahl, deren Erwartungswert bei etwa dem doppelten Wert der Erkennungsgrenze n_n^* liegt zuzüglich der entsprechenden Hintergrundimpulszahl:

$$n_b(\text{Start der Iteration}) = 2 \cdot n_n^* + n_0 \cdot \frac{t_b}{t_0}. \quad (13)$$

Von dieser Verteilung ausgehend wird das 5 %-Quantil berechnet und mit der zuvor bestimmten Erkennungsgrenze verglichen. Solange das Quantil nicht mit der Erkennungsgrenze im Rahmen einer vorgegebenen Toleranz verträglich ist, wird ein neues Zufallsexperiment simuliert, wobei der Erwartungswert der Poissonverteilungsdichte um einen kleinen Betrag erhöht wird, siehe Abbildung 13. Ist die Verträglichkeit gegeben, so folgt die Nachweisgrenze aus dem Erwartungswert der zuletzt ermittelten Wahrscheinlichkeitsdichte. Wenn Erkennungs- und Nachweisgrenze berechnet werden, geht nur die gemessene Hintergrundimpulszahl ein. Sie bestimmt die Werte der beiden charakteristischen Grenzen. Der Messwert für die Bruttoimpulszahl wird nur für die Berechnung der Nettoimpulszahl und des besten Schätzwerts benutzt.

7.4 Methoden und Material

Im zweiten Versuchsteil kommt ein handelsüblicher PC (CPU i5 mit 2 physischen Kernen und SSD) zum Einsatz, an den das Micro-Controller-Board Nucleo (μC) des Herstellers STM angeschlossen ist, siehe unter: [STM Nucleo Board](#). Der μC zählt die Rechtecksignale des PIN-Diodenarrays RD2014 vom Hersteller Teviso, siehe unter [Teviso](#). Der Detektor enthält eine Vorverstärker und Pulsformer, der für jeden Impuls ein TTL-Signal erzeugt, das auf einen Zähler-Eingang des μC gelegt ist. Dieser ist in Abbildung 1 zu sehen. Der μC wird über ein USB-Kabel mit dem Rechner verbunden. Die Datenbereitstellung durch den μC startet sofort, nachdem das μC -Board mit einer PC-USB-Schnittstelle verbunden worden ist.

Mit der graphischen Oberfläche zu diesem Versuchsteil kann die Datenaufnahme und die Datenverarbeitung gesteuert werden.

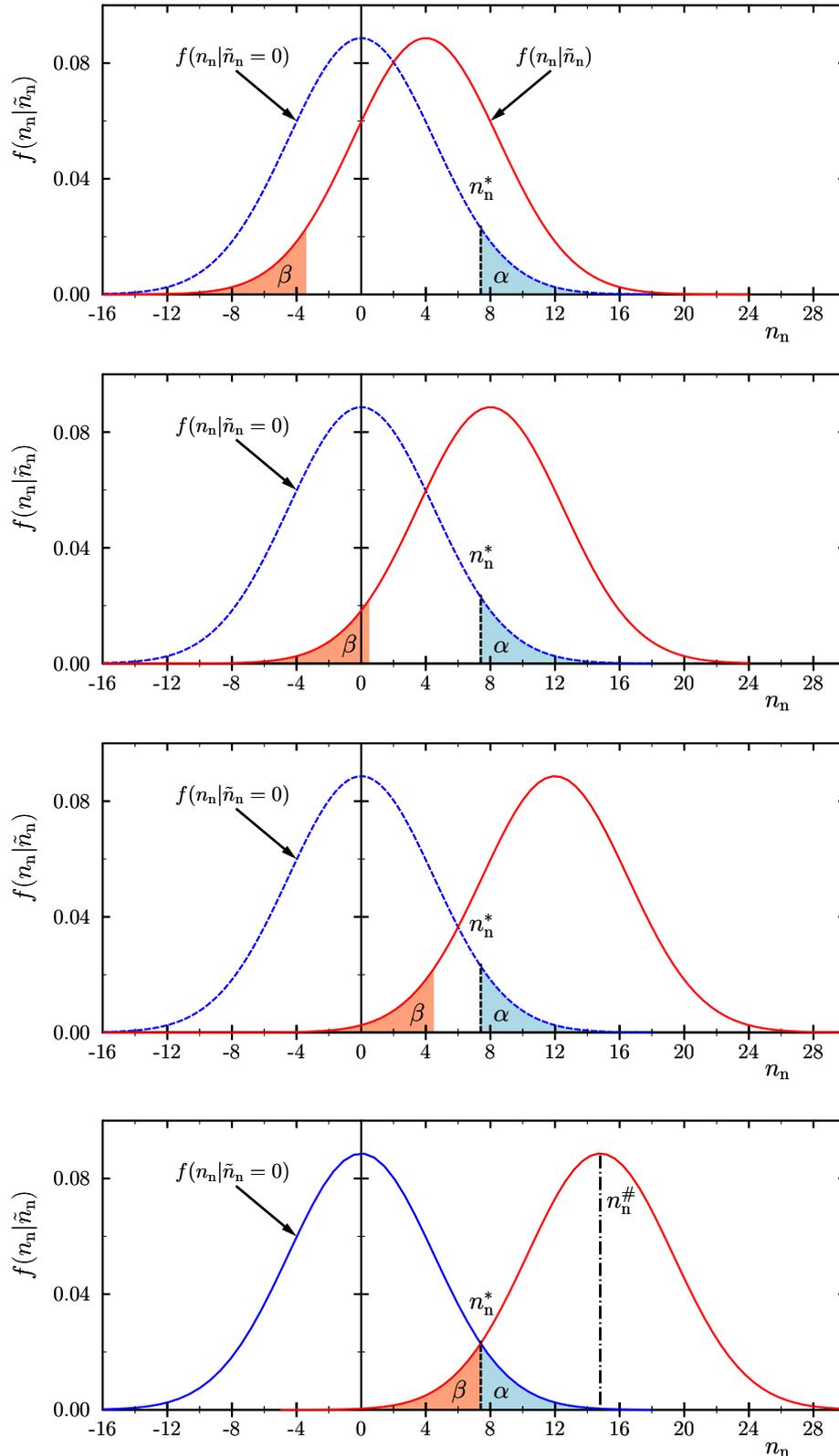


Abbildung 13: Die Nachweisgrenze ergibt sich aus der Verschiebung einer geeigneten Verteilungsdichte (rot) nach rechts, bis die Fläche β genau links der Erkennungsgrenze n_n^* liegt. Die Nachweisgrenze $n_n^\#$ entspricht im Beispiel der Abbildung dem Erwartungswert der Verteilungsdichte am Ende der Verschiebung. Der Einfachheit wurde für die Abbildung eine Gaußverteilungsdichte gewählt, deren Standardabweichung gleich bleibt. Dies muss nicht so sein, siehe die Poissonverteilungsdichte.

8 Disclaimer

Dieses Dokument enthält Links zu externen Websites Dritter, auf deren Inhalte wir keinen Einfluss haben. Deshalb können wir für diese fremden Inhalte auch keine Gewähr übernehmen. Für die Inhalte der verlinkten Seiten ist stets der jeweilige Anbieter oder Betreiber der Seiten verantwortlich. Die verlinkten Seiten wurden zum Zeitpunkt der Verlinkung auf mögliche Rechtsverstöße überprüft. Rechtswidrige Inhalte waren zum Zeitpunkt der Verlinkung nicht erkennbar. Eine permanente inhaltliche Kontrolle der verlinkten Seiten ist jedoch ohne konkrete Anhaltspunkte einer Rechtsverletzung nicht zumutbar. Bei Bekanntwerden von Rechtsverletzungen werden wir derartige Links umgehend entfernen (Stand 28. Mai 2019).

Literatur

[Bo95] Bosch, Karl: *Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung*, 6. Auflage, Vieweg Verlag, 1995.